



FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio



Palchetto

Num.° d'ordine

241-B-53

NAZIONALE

B. Prov.

R. BIBLIOTECA

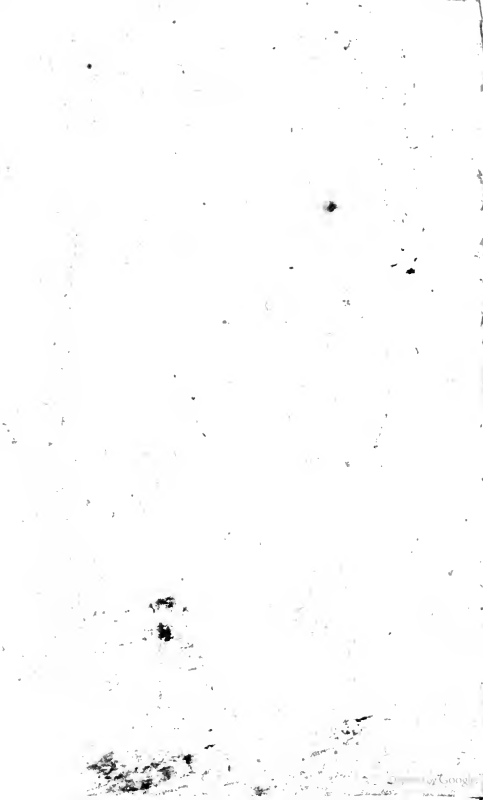
VITT. EM. III

II

2044

NAPOLI





Dr. Proc. II 20174

20 D 6

C11310

ELEMENS D'ALGEBRE.

Par M. CLAIRAUT,

*De l'Académie Royale des Sciences,
des Sociétés Royales de Londres, de
Berlin, d'Upsal & d'Edimbourg, de
l'Académie de l'Institut de Bologne.*



A PARIS,

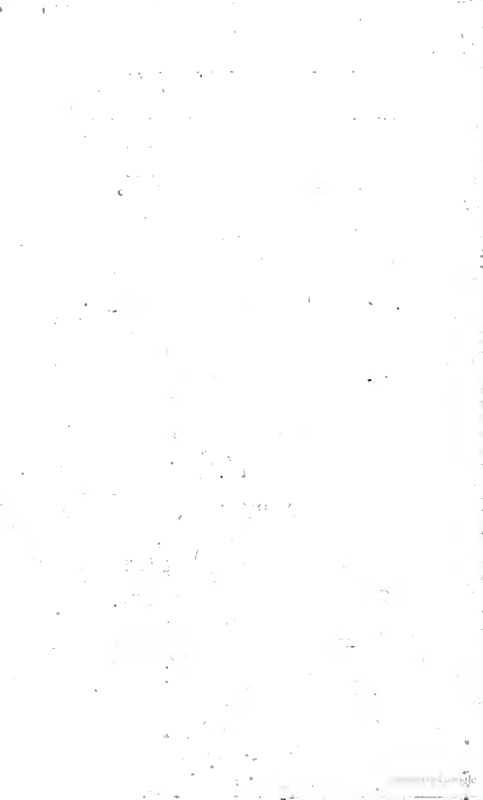
Rue Saint Jacques ;

Chez { Les Freres GUERIN, à S. Thomas
d'Aquin.
DAVID l'aîné, à la Plume d'or.
DURAND, au Griffon.

M. DCC. XLVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

de Ruffschky





PREFACE.



Je me suis proposé de suivre dans cet ouvrage la même méthode que dans mes *Elémens de Géométrie* : J'ai tâché d'y donner les regles de l'Algebre dans un ordre que les Inventeurs eussent pû suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous la forme de Theoremes , toutes semblent être découvertes en s'exerçant sur les Problèmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.

Des problèmes utiles au commerce comme ceux où il est question de partager des sommes entre différentes personnes à raison de leurs mises ou de quelques conventions faites entr'elles ; des regles d'alliage , &c. sont les pro-

A



blèmes que je suppose avoir occupé les premiers Algébristes.

Je commence par donner la solution d'un des plus simples de ces Problèmes, telle qu'on la peut trouver sans avoir aucune teinture de l'Algèbre. Il est aisé de reconnoître dans cette solution que si la mémoire suffit à retenir tous les raisonnemens par lesquels il faut passer pour y arriver, c'est que la suite de ces raisonnemens n'est pas bien longue ; & l'on voit en même-tems que lorsqu'on s'élève à des Problèmes qui en demandent une plus grande , il faut chercher à les écrire d'une manière fort abrégée , il faut imaginer quelques signes à l'aide desquels on puisse exprimer l'état où la difficulté est réduite à chaque pas qu'on fait pour la résoudre. Cette manière d'écrire les questions, est l'Algèbre que je fais pour ainsi dire inventer au Lecteur.

Pour aller toujours du plus simple au plus composé , je ne propose d'abord que des questions numériques , parce que ce sont celles qui fixent le plus l'esprit des commençans. Après en avoir

P R E F A C E. iij

réfolu plusieurs qui ne diffèrent les unes des autres que par les nombres donnés dans l'énoncé, on s'apperçoit aisément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve commune dans chaque résolution, & qu'il seroit à souhaiter de ne faire qu'une seule fois : je saisis cette occasion d'expliquer la maniere de résoudre généralement les Problèmes, en employant au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes sortes de grandeurs : & je montre ensuite à tirer des solutions générales les solutions particulières au moyen de la substitution des nombres à la place des lettres.

Parmi les différens Problèmes où j'employe des lettres au lieu de nombres, il s'en trouve d'assés compliqués pour ne pouvoir pas être résolus sans employer les regles d'addition, soustraction, multiplication & division : je montre alors comment on doit faire ces opérations. Je n'ai pas crû devoir les enseigner plutôt, parce que les commençans les suivent avec peine & avec

dégoût lorsqu'on les leur enseigne dans un tems où ils n'ont aucune idée des quantités sur lesquelles ils operent.

La multiplication est de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les commençans , & dont l'explication embarrasse le plus les maîtres ; ce principe qu'elle renferme , que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité positive , est presque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber , je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans lesquelles on a dû en remarquer la nécessité. Je commence par enseigner à multiplier une quantité composée de plusieurs termes positifs & négatifs par un seul terme que je suppose toujours positif , parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à considérer une quantité négative comme existant seule. Cette multiplication étant expliquée , je passe à celle où le multiplicateur est aussi bien que le multiplicande composé de plusieurs termes positifs & négatifs , & je fais

voir facilement que cette opération n'est autre chose que la première répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, & que suivant que les termes de ce multiplicateur sont positifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent doivent être ou ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen je familiarise les commençans avec la multiplication, sans que j'aye seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que *moins* par *plus* donne *moins*, *moins* par *moins* donne *plus*, &c. qui en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laissent presque toujours croire qu'il y en a une dans la chose.

On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, & je n'aurois fait réellement que l'éluder, si je ne parlois pas de la multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités aussi entièrement négatives, opération dans laquelle on ne sçauroit éviter la contradiction apparente dont je viens de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication

vj **P R E F A C E.**

après en avoir montré la nécessité au Lecteur , en le conduisant à un Problème où l'on est obligé de considérer des quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités positives dont elles soient retranchées.

Lorsque je suis parvenu dans ce Problème au point où il s'agit de multiplier ou de diviser des quantités négatives les unes par les autres , je prends le parti qu'ont sans doute pris les premiers Analystes qui ont eu de ces opérations à faire , & qui ont voulu suivre une route entièrement sûre , je cherche une autre solution du Problème par laquelle je puisse éviter toute espèce de multiplication ou de division de quantités négatives , par ce moyen j'arrive au résultat sans employer d'autres raisonnemens que ceux sur lesquels on ne peut former aucun doute ; & je vois ce que doivent être ces produits ou quotients de quantités négatives que m'avoit donnés la première solution. Il n'est pas difficile ensuite d'en tirer ces principes si fameux que *moins par moins donne plus* , &c.

P R E F A C E. vij

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, & le Lecteur parvient en même-tems à connoître la nature des solutions négatives des Problèmes, il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avoit employée en exprimant les conditions du Problème.

La premiere Partie de cet ouvrage traite uniquement des équations du premier degré, soit à une, soit à plusieurs inconnues, & de toutes les opérations que demandent ces équations, tant pour arriver à leur résolution, que pour la rendre aussi simple qu'elle puisse être. Telle est par exemple la regle qu'il faut suivre pour trouver le plus grand commun diviseur laquelle naît de la nécessité de réduire une fraction à sa plus simple expression. Cette regle est expliquée d'une maniere nouvelle, & j'y ai ajouté plusieurs réflexions qui la rendent applicable à des cas où la maniere ordinaire de la traiter pourroit

rebuter par la longueur des calculs , & ne pas toujours donner la quantité qu'on cherche.

Dans la seconde Partie je parle des Equations du second degré , un Problème où il s'agit d'intérêt d'intérêts m'amène à une de ces Equations ; je l'ai choisi de nature à donner pour ses deux solutions deux nombres positifs , afin de mieux faire voir comment deux nombres différens résolvent le même Problème. J'en ai usé ainsi , de peur que les commençans qui ne regardent pas volontiers les racines négatives comme de véritables solutions , ne crussent que le Problème n'avoit réellement qu'une solution.

Afin cependant de les accoutumer aux racines négatives , je donne ensuite un Problème dans lequel il y a une de ces racines , & telle cependant qu'aucun commençant ne peut s'empêcher de voir qu'elle satisfait autant au Problème que la positive.

La résolution des Equations que demandent ces Problèmes & ceux de même espèce qu'on peut se proposer , en-

gagent les Lecteurs à apprendre plusieurs opérations essentielles de l'Algèbre, telles que les extractions des racines quarrées, la réduction des radicaux, leurs additions, soustractions, &c. opérations qu'on donne d'ordinaire au commencement des Elémens d'Algèbre, mais que mon Plan exigeoit de placer en ce lieu.

De ces opérations je passe à un Problème dans lequel on doit employer plusieurs Equations du second degré contenant chacune plusieurs inconnues, & je donne les moyens de réduire toutes ces Equations à une seule qui ne contienne qu'une inconnue. Je fais voir en même-tems que cette méthode n'est pas seulement propre aux Equations où les inconnues ne montent qu'au second degré, mais qu'elle s'étend à tous les degrés.

La troisième Partie a pour objet les Equations de tous les degrés prises en général; je traite du nombre de leurs racines, des propriétés que les coefficients du second, du troisième, &c. terme ont d'être ou la somme des racines,

ou celle des produits de ces racines , &c. Je tire de ces propriétés la fameuse règle de Descartes , pour trouver toutes les racines commensurables qui sont dans une Equation ; & comme cette méthode engage dans des calculs excessifs à cause du grand nombre de divisions qu'il faut tenter , je donne la méthode de Mr Newton , qui s'étend non-seulement aux racines commensurables ou diviseurs d'une dimension , mais aux diviseurs de tant de dimensions que l'on veut. Je ne me contente pas de donner la démonstration de cette méthode que Mr Newton avoit supprimée , mais je fais voir par quelle route il a pû la découvrir. C'est un avantage que je ne crois pas qu'on puisse trouver dans la démonstration que Mr s'Gravesande en a donnée (dans son *Specimen commentarii in arithmetica universalem* , inséré à la fin de ses *Elémens d'Algebre*) & qui est la seule que je sache avoir été donnée malgré le grand nombre de traités d'Algebre qui ont paru depuis Mr Newton. J'ai appris cependant que le R. P. Jacquier, connu pour avoir com-

P R E F A C E. xj

menté les recherches de Mr Newton les plus élevées avoit pris la peine de traiter celle-ci , mais ce qu'il a fait sur cette matiere n'est pas venu à ma connoissance.

Au reste dans cette Partie & dans celles qui suivent , je ne m'arrête pas, comme dans les deux précédentes , à montrer les Problèmes qui pourroient avoir conduit aux Equations que j'examine , parce que je ne crois plus avoir besoin de ce motif pour exciter la curiosité des Lecteurs. Ils ont dû suffisamment voir par les premiers Problèmes, de quelle importance il étoit de sçavoir résoudre toutes sortes d'Equations.

Je traite dans la quatrième Partie des Equations de tous les degrés lorsqu'elles n'ont que deux termes , ou lorsqu'en ayant trois , elles se réduisent à la méthode des Equations du second degré par une simple transformation. J'enseigne par ce moyen aux commençans , un grand nombre d'opérations sur les quantités radicales de toute espèce , & je leur donne une connoissance entiere de l'élévation des puis-

xij *P R E F A C E.*

fances, & de l'extraction des racines.

Une regle qui est absolument nécessaire pour la résolution complete de ces Equations, & qui a toujours été omise dans tous les Auteurs Elementaires, (excepté Mr s'Gravesande) c'est l'extraction des racines des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables : Mr Newton à qui on doit cette regle, l'ayant donnée à son ordinaire sans démonstration, je l'ai traitée ici comme un Problème ; par ce moyen la découverte & la démonstration marchent toujours de concert.

La Méthode de Mr Newton s'étend aux quantités numériques quelque soit l'exposant de la racine, mais elle ne s'applique pas aux quantités littérales, lorsque cet exposant passe le second degré ; je supplée ce qui manque à cette Méthode, en donnant le procédé qu'il faut suivre pour les quantités littérales. De plus je fais voir que la Méthode de Mr Newton, pour les quantités numériques, peut induire en erreur dans quelques occasions, c'est lorsque la racine

P R E F A C E. xiiij

d'une quantité contient des fractions quoique la quantité n'en contienne point. Je montre ce qu'il faut faire alors pour remédier à cet inconvénient.

Mr s'Gravefande qui a commenté l'article de l'Arithmétique universelle de Mr Newton , où se trouve cette Méthode , n'a point remarqué les cas qui peuvent y échapper , & il n'a point donné la manière de l'appliquer aux quantités littérales de tous les degrés.

Toutes ces opérations supposant dans le cas d'une puissance quelconque la formule du Binôme , j'en donne une démonstration nouvelle , & je montre les différentes utilités qu'on peut tirer de cette formule , pour trouver par approximation toutes sortes de quantités composées à volonté de radicaux , de fractions , &c. ce qui peut préparer les commençans à l'analyse de l'infini.

La cinquième Partie traite des Equations du troisième & du quatrième degré qui ont tous leurs termes , c'est-à-dire , toute la complication qu'elles peuvent avoir. Je donne d'abord la solution générale des Equations du troi-

sième degré , & je fais voir ensuite les Equations particulieres , où cette solution n'apprend point la valeur de l'inconnue , ce qui forme le cas qu'on appelle irréductible. Dans ces Equations au défaut des racines exactes , j'apprends à en trouver par approximation ; Je donne pour y parvenir une méthode nouvelle beaucoup plus simple que celles qui ont paru jusqu'à présent. Par cette méthode dès la premiere opération , j'ai la valeur de la racine cherchée à un millieme près , & à la seconde à un millionieme , & ainsi de suite.

Je passe de-là aux Equations du quatrième degré , & après avoir donné leur résolution générale , Je fais voir que cette résolution , ainsi que celle des Equations du second degré , a cet avantage sur la résolution des Equations du troisième , qu'une seule & même formule peut à l'aide des signes plus & moins exprimer toutes les racines de l'Equation. Je démontre aussi , ce que tous les Auteurs Elémentaires n'ont fait que supposer, que les quatre racines d'une Equation du quatrième degré , sont

toujours ou toutes quatre réelles , ou toutes quatre imaginaires , ou deux réelles , & deux imaginaires ; c'est-à-dire , que je prouve que les racines imaginaires des Equations du quatrième degré , peuvent , ainsi que celles du second , être regardées comme composées d'une partie réelle , & d'une partie qui est la racine quarrée d'une quantité négative.

La résolution des Equations du quatrième degré étant fondée sur celle des Equations du troisième , elle a de même que ces Equations cet inconvénient , que dans un cas on ne sçauroit avoir les racines que par approximation. Je donne une maniere bien simple de trouver cette approximation en employant celle que j'avois donnée précédemment pour les Equations du troisième degré.

Quant aux Equations qui passent le quatrième degré , je ne donne rien pour leur résolution en général , parce que jusqu'à présent on n'a pû y parvenir quelques efforts qu'ayent fait les Analystes. L'on est réduit , excepté quelques cas particuliers que j'ai traités , pour la plupart , dans la troisième & quatrième

xvj *P R E F A C E.*

partie , à de simples approximations ; & comme ces approximations sont beaucoup plus faciles lorsqu'on est aidé de la Géométrie , je remets à traiter de ces Equations , lorsque j'enseignerai la Theorie des lignes courbes.

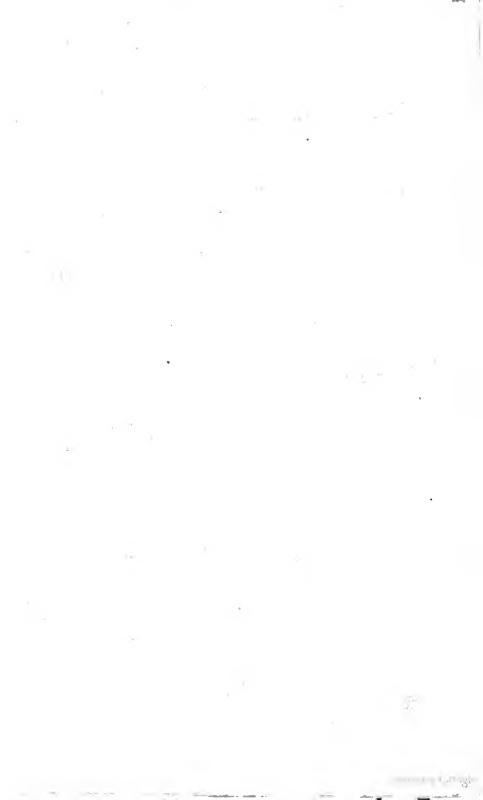
On devoit s'attendre après ce que j'avois dit en annonçant mes Elémens d'Algebre , à y trouver des applications de cette science à la Géométrie , j'ai crû cependant devoir les réserver pour un autre ouvrage. Il m'a paru qu'en donnant un traité entier de pure Algebre , c'étoit offrir aux commençans les moyens de s'y fortifier davantage , & qu'ils gagneroient à ne l'appliquer à la Géométrie , que lorsque les opérations Analytiques ne leur couteroient plus. J'espere que les Principes qu'ils trouveront dans cet ouvrage , les mettront en état de surmonter les plus grandes difficultés qu'ils rencontreront dans la haute Géométrie.

Au reste , je ne suppose pour l'intelligence de ce traité , que les opérations principales de l'Arithmetique , parmi lesquelles je compte la regle de
trois ,

PREFACE. xvij

trois ; ceux qui auront lû mes Elemens de Géometrie posséderont la théorie des proportions autant qu'il est nécessaire pour entendre tout ce que je dis ici. J'avois d'abord compté donner dans le même Livre tant les Elemens d'Arithmetique que ceux d'Algebre, & je n'aurois pas manqué alors de traiter des proportions plus à fond que je n'ai fait dans mes Elemens de Géometrie, mais l'ordre que j'ai suivi m'a paru demander de traiter séparément ces deux Sciences. En effet, voulant me rapprocher autant qu'il est possible du chemin des Inventeurs, j'ai dû supposer l'Arithmetique familiere à ceux qui vouloient pénétrer dans l'Algebre.

ELEMENS





ELEMENS D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE

*De la Méthode Algebrique d'exprimer
les Problèmes par des Equations, &
de la résolution des Equations du
premier degré.*



ARMY les différens Problèmes dont les premiers Mathématiciens qui ont eu le nom d'Algebristes se sont occupés, je choisis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils sont parvenus à former la Science qu'on nomme Algebre ou Analyse.

I.

Partager une somme, par exemple 890 lb

A *

Exemple d'un Problème semblable à ceux que les premiers Algèbristes ont pu se proposer.

à trois personnes , en sorte que la première ait 180 lb de plus que la seconde , & la seconde , 115 lb de plus que la troisième.

Voici d'abord comme j'imagine qu'aura raisonné un homme , qui , sans aucune teinture de l'Algèbre , sera parvenu à résoudre ce Problème.

Solution de ce Problème telle qu'on la pourroit trouver sans Algèbre.

Il est évident que si on connoissoit une des trois parts , on connoitroit aussi-tôt les deux autres , supposons , par exemple , qu'on connoisse la troisième qui est la plus petite , il faudra y ajouter 115 lb , & l'on aura la valeur de la seconde ; ensuite pour avoir la première , il faudra ajouter 180 lb à cette seconde , ce qui revient au même que si on ajoutoit 180 lb plus 115 lb ou 285 lb à la troisième.

Quelle que soit la troisième part , nous savons donc que cette part , plus elle-même avec 115 lb plus encore elle-même avec 295 lb doit faire une somme égale à 890 lb.

De-là , il suit que le triple de la plus petite part , plus 115 lb plus 295 lb ou en une fois plus 410 lb est égal à 890 lb.

Or , si le triple de la part qu'on cherche plus 410 lb est égal à 890 lb , il faut donc que ce triple de la part qu'on cherche soit plus petit que 890 lb de 410 lb. Donc ce triple de la plus petite part est égal à 480 lb. Donc la plus petite part est égale à 160 lb.

La seconde sera par conséquent de 275 lb , & la première ou la plus grande de 450 lb.

C'est vraisemblablement ainsi que les pre-

miers Algebristes ont raisonné quand ils se sont proposés de pareilles questions, sans doute qu'à mesure qu'ils avançoient vers la solution d'une question, ils chargeoient leur memoire de tous les raisonnemens qui les avoient conduits au point où ils en étoient, & lorsque les questions n'étoient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avoit pas de quoi se rebuter, mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchassent une manière plus courte de s'exprimer, qu'ils eussent quelques signes simples, avec lesquels quelque-avancés qu'ils fussent dans la solution d'un Problème, ils pussent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avoient fait & ce qui leur restoit à faire. Or l'espece de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'est l'Algebre.

II.

Pour mieux donner les principes de cette Science, nous allons reprendre la même question, nous écrirons en langage ordinaire les raisonnemens que l'Algebriste fait pour résoudre son Problème & en caracteres Algebriques, ce qu'il lui suffit d'écrire pour aider sa memoire.

Méthode
Algebrique
d'exprimer
le Problème
précédent.

La plus petite ou la troisième part, quelle qu'elle soit, je l'exprime par une seule lettre qui sera par exemple. x

La seconde sera par consequent x plus 115, ce que j'écris ainsi $x + 115$, choisissant le signe $+$ qu'on prononce *plus* pour désigner l'Addition des deux quantités entre lesquelles on le place.

Le signe $+$
indique l'ad-
dition.

Quant à la première part ou la plus grande,

A ij

comme elle surpasse la seconde de 180 elle sera donc exprimée par $x + 115 + 180$

Ajoutant ces trois parts, on aura
 $3x + 115 + 115 + 180$
 ou en réduisant $3x + 410$

Mais cette somme des trois parts doit égaler 890 lb ce que j'exprime ainsi. $3x + 410 = 890$

Le signe =
marque l'é-
galité.

Employant le caractère = qui se prononce *égal* pour exprimer l'égalité des deux quantités entre lesquelles on le place.

La question ; par ce Calcul, est donc changé en une autre , où il s'agit de trouver une quantité dont le triple étant ajouté avec 410 fasse 890

Une Equa-
tion est l'é-
galité de
deux quanti-
tés.

Trouver la résolution de semblables questions ; c'est ce qu'on appelle résoudre une Equation , l'Equation dans ce cas ci est $3x + 410 = 890$

On résout
une Equation
lorsqu'on
trouve la va-
leur de l'in-
connue qu'il
le renferme.

on l'appelle ainsi ; parce qu'elle indique l'égalité de deux quantités , résoudre cette Equation, c'est trouver la valeur de l'inconnue x par cette condition que son triple plus 410 fasse 890

I I I.

Pour résoudre cette Equation , voici comment l'Algebriste raisonne , & comment il écrit ses raisonnemens. L'Equation à résoudre . . .

Résolution
de l'Equa-
tion qui ex-
prime le pro-
blème précé-
dent.

..... $3x + 410 = 890$
m'apprend qu'il faut ajouter . . . 410 à $3x$

pour faire la somme de 890, donc $3x$ sont moindres que 890 de 410, ce que j'écris ainsi . . . $3x = 890 - 410$

Le caractère
— indique la
soustraction.

Prenant le caractère — qui se prononce *moins* pour faire ressouvenir que la quantité qu'il précède doit être retranchée de celle qu'il suit.

De cette nouvelle Equation $3x = 890 - 410$

D'ALGEBRE.

5

on tire, en retranchant en effet 410 de 890, cette autre Equation $3x=480$.

Mais si trois x valent 480, un x vaut donc le tiers de 480 ou 160 ce que j'écris ainsi, $x=\frac{480}{3}=160$, & la question est résolue, puisqu'il suffit de connoître une des parts pour connoître les autres.

I V.

Si on avoit voulu résoudre la question en commençant par chercher la plus grande part, on l'auroit pû de même.

Autre solution du Problème précédent.

Voici comment on s'y feroit pris.

Soit cette premiere part y

La seconde ayant 180 de moins sera $y-180$

Et la troisiéme ayant 115 de moins que la seconde sera $y-180-115$

Or la somme de ces trois quantités est . .

. $3y+180-180-115$
c'est-à-dire $3y-475$

Mais cette somme doit éгалer 890.

On a donc l'Equation $3y-475=890$ qui apprend que $3y$ surpassent 890 de 475, puisqu'il faut retrancher 475 de $3y$ pour avoir 890. Donc $3y=890+475$ ou $3y=1365$

Donc y ou la plus grande part $=455$ comme ci-dessus.

V.

Si dans le Problème il avoit fallu partager une somme plus ou moins grande que celle qu'on a employée, & que les différences eussent été d'autres nombres que ceux dont on s'est servis, il est évident qu'on l'auroit résolu de la même maniere. Supposons, par exemple, que

A iij

6 E L E M E N S

le Problème eut été énoncé ainsi.

Autre exemple du Problème précédent. Partager 9600 à quatre personnes, en sorte que la première ait 300 de plus que la seconde, & la seconde 250 de plus que la troisième, & la troisième 200 de plus que la quatrième.

On auroit raisonné de la manière suivante:

En nommant la quatrième

part x

La troisième sera $x + 200$

La seconde $x + 200 + 250$

La première $x + 200 + 250 + 300$

Or la somme de toutes ces parts doit être égale à 9600. On a donc l'Equation.

$$4x + 1400 = 9600.$$

Pour résoudre cette Equation, je remarque comme dans la précédente, que si $4x$ ne sont égaux à 9600 que lorsqu'on leur a ajouté 1400, il faut qu'ils soient égaux à ce qu'il reste de 9600 lorsqu'on en a retranché 1400, ce que l'on écrit ainsi, . . . $4x = 9600 - 1400$

$$\text{ou } 4x = 8200.$$

Mais si quatre x sont égaux à 8200, un x vaut donc le quart de 8200, c'est-à-dire que $x = \frac{8200}{4} = 2050$, la plus petite part x étant connue les autres se trouvent tout de suite, la troisième $= 2250$, la seconde $= 2500$, & la première $= 2800$.

V I.

Le Problème pourroit être encore plus varié & dépendre toujours des mêmes principes; supposons, par exemple, qu'il fut énoncé ainsi.

Troisième exemple du problème précédent. Partager 5500 en deux parties de manière que la première ait un tiers de plus que la se-

conde, plus encore 180.

Voici comment on le résoudroit.

Soit la seconde part. x

On aura pour la première $x + \frac{2}{3}x + 180$.

Or comme leur somme doit égaler 5500, on a donc l'Equation $2x + x + \frac{2}{3}x + 180 = 5500$. Pour résoudre cette Equation je commencerai par ajouter $2x$ avec $\frac{2}{3}x$ ce qui me donne $\frac{7}{3}x$ parce que deux entiers valent six tiers, & que par conséquent ces deux entiers avec un tiers font sept tiers. Donc l'Equation précédente se réduit à $\frac{7x}{3} + 180 = 5500$ qui deviendra par le même raisonnement que dans les exemples précédens $\frac{7x}{3} = 5500 - 180$
ou $\frac{7x}{3} = 5320$.

Or si le tiers de $7x$ vaut 5320 les $7x$ entiers valent donc trois fois davantage, ce que l'on écrit ainsi. $7x = 5320 \times 3$. Employant le signe \times qui se prononce *par* pour désigner la multiplication des deux quantités qu'il sépare. Le signe \times indique la multiplication.

Ensuite au lieu de $7x = 5320 \times 3$ il suffit d'écrire $7x = 15960$ que l'on a en multipliant en effet 5320 par 3.

Et par le moyen de cette nouvelle Equation on a $x = \frac{15960}{7} = 228$ valeur de la seconde part.

La première part sera aisée à trouver ensuite, puisqu'il ne faudra qu'ajouter à cette quantité 2280 son tiers 760 & de plus 180, ainsi qu'on l'avoit proposé, & l'on aura 3326 pour la première part.

Les commençans pourront s'exercer à va-

rier encore davantage l'enoncé du Problème précédent, & à le résoudre dans les différens cas qu'ils imagineront, ils seront récompensés de leurs peines par la facilité qu'ils acquerront. Afin de les aider davantage, je vais donner un autre Problème qui a encore beaucoup de rapport avec le précédent.

VII.

Nouveau
Problème
de même
nature que
le précé-
dent,

Trois Marchands font une Société, le premier fournit 17000 lb le second 13000 lb, le troisième 10000 ; comme ils ont besoin de quelqu'un qui se donne les soins que demande leur commerce, celui qui n'a mis que 10000 lb se charge de toutes les affaires, à condition qu'il tirera de plus que les autres 3 pour 100 de tout le gain qui se fera : Il arrive que ce gain monte à 100000 lb on demande ce qu'il faut qu'ils en aient chacun.

Soit la part du premier x

Le second ayant mis moins dans la raison de 13 à 17 doit avoir une somme moindre dans cette même raison, c'est-à-dire seulement $\frac{13}{17} x$

Le troisième en supposant qu'il n'eut qu'à raison de sa mise auroit les $\frac{10}{17}$ èmes du premier, mais devant avoir de plus 3 pour 100 sur tout, c'est-à-dire 3000 lb sa part sera $\frac{10}{17} x + 3000$

Et comme la somme de ces trois parts doit être 100000 lb on aura $x + \frac{13}{17} x + \frac{10}{17} x + 3000 = 100000$

ou $x + \frac{13}{17} x + \frac{10}{17} x = 97000$

Pour dégager l'inconnue de cette équation soit considéré que $x + \frac{13}{17} x + \frac{10}{17} x$ ou $\frac{17}{17} x + \frac{13}{17} x + \frac{10}{17} x$

D'ALGÈBRE.

9

ne signifie autre chose que $\frac{40}{17}x$ on a donc $\frac{40}{17}x = 97000$ ou $40x = 97000 \times 17$ ou $40x = 1649000$ ou $x = \frac{1649000}{40} = 41225$.

La part du premier étant trouvée celle du second exprimée par $\frac{13}{17}x$ fera $\frac{13}{17} \times 41225$, c'est-à-dire 31525, celle du troisième exprimée par $\frac{10}{17}x + 3000$ fera $\frac{10}{17} \times 41225 + 3000 = 27250$.

VIII.

Par ces deux Problèmes les Lecteurs entroyent ce que c'est que l'Algebre, & ils apprennent qu'en général la solution d'un Problème est composée de deux parties; dans la première on nomme par une lettre comme x ou y &c. la quantité inconnue qu'on cherche, ou une de celles qui étant connue, détermineroit les autres, on tâche ensuite d'arriver à une Equation où l'inconnue se trouve, ce qui se fait en exprimant de deux manières différentes une même quantité.

La solution analytique d'un Problème a deux parties.

Dans la première on exprime ce Problème par une Equation.

Dans la seconde partie il s'agit de dégager l'inconnue de l'Equation.

Dans la seconde on résout cette Equation.

La première de ces deux parties est difficile à réduire en préceptes clairs pour les commençans, ce ne peut-être que par des exemples qu'on la fasse bien sentir.

Quant à la seconde on la peut beaucoup plus aisément expliquer d'une manière générale.

IX.

Dans les questions que nous venons de résoudre on est arrivé à des Equations dans lesquelles l'inconnue ne se trouvoit pas autrement engagée que par la multiplication ou la division de nombres connus; on appelle ces

Les Equations du premier degré sont celles, où l'inconnue n'est

multipliée
ou divisée
que par des
quantités
connues.

fortes d'Equations, Equations du premier degré, telles sont $2x - 10 = 56$, $\frac{2}{3}x + 15 = x - \frac{1}{5}x + 30$ &c. Et les Problèmes qui conduisent à ces Equations sont nommés des Problèmes du premier degré.

On les appelle ainsi pour les distinguer de ceux dans lesquels l'inconnue seroit ou quarrée, * ou cubée, &c. qu'on dit être, aussi bien que leurs Equations, du second degré si l'inconnue est quarrée, du troisième si l'inconnue est cubée &c.

Qu'on demandât, par exemple un nombre dont le triple étant ajouté avec le quarré, don nât 65 le Problème qu'il faudroit résoudre alors seroit du second degré. Et l'Equation $3x + xx = 65$ (dans laquelle xx désigne le quarré de x) qui exprimeroit les conditions de ce Problème seroit une Equation du second degré.

On n'a pû parvenir à la résolution de ces Equations qu'après s'être exercé long-tems aux Equations du premier degré. Nous allons donc chercher toutes les regles que demandent celles-ci.

X.

Pour les trouver reprenons d'abord l'Equation $4x + 1400 = 9600$ traitée Art. V, laquelle

* On doit avoir vu en Arithmétique qu'un nombre est quarré ou cubé, suivant qu'il est multiplié une ou deux fois par lui-même. On quarré 7 par exemple lorsque, en le multipliant par lui-même, on en forme 49, de même on le cube lorsque le multipliant deux fois par lui-même on en forme 243.

est composée des trois termes $4x$, 1400 , 9600 , (on appelle ainsi toutes les parties d'une Equation séparées les unes des autres par les signes $+$ ou $-$) & remarquons que par le même raisonnement, par lequel nous en avons tiré que $4x = 9600 - 1400$, nous pourrions dans toutes fortes d'Equations prendre quelque terme que ce soit précédé du signe $+$ & le passer de l'autre côté du signe $=$ en lui donnant le signe $-$. Qu'on ait par exemple $50 + \frac{10}{3}x = 5x + 30$ il sera permis de passer le terme $\frac{10}{3}x$ en $-$ de l'autre côté & écrire ainsi l'Equation $50 = 5x + 30 - \frac{10}{3}x$, car on peut dire comme dans l'Art. V. que puisqu'il faut ajouter $\frac{10}{3}x$ à 50 pour être égal à la quantité $5x + 30$, il faut donc que 50 soit plus petit que $5x + 30$ de la quantité $\frac{10}{3}x$ c'est-à-dire qu'il soit égal à $5x + 30 - \frac{10}{3}x$.

Les termes d'une Equation sont ses parties séparées par les signes $+$ ou $-$

De la même manière qu'on a vu Art. III. que l'Equation $3y - 475 = 890$ se changeoit en $3y = 890 + 475$, on verra qu'en général les termes qui sont en $-$ d'un côté du signe d'Égalité peuvent être passés en $+$ de l'autre. Qu'on ait par exemple $32 - 6x = 9x + 119$ on en tirera $32 = 6x + 9x + 119$. Car si 32 doit être diminué de $6x$ pour égaler $9x + 119$, il faut qu'il soit plus grand de $6x$ que cette quantité, c'est-à-dire qu'il soit égal à $6x + 9x + 119$.

XI.

Voilà donc un principe général pour toutes les Equations, c'est que les termes que l'on voudra pourront être passés d'un côté de l'Equation à l'autre, en observant de changer leurs signes. Or ce principe est d'une utilité infinie

Tout terme peut être passé d'un côté de l'Equation à l'autre en changeant de signe.

en ce. qu'il épargne beaucoup de raisonnemens.

XII.

On appelle
membres
d'une Equa-
tion ses deux
parties sépa-
rées par le
signe =

Par son moyen on peut toujours changer une Equation en une autre, où l'on ait d'un côté du signe =, c'est-à-dire dans l'un des membres de l'Equation les termes affectés de x & de l'autre côté du signe = c'est-à-dire dans l'autre membre de l'Equation tout ce qui est entièrement connu.

Que l'on ait par exemple l'Equation $8x + 30 = \frac{1}{3}x + 250$; j'en tire $8x - \frac{1}{3}x = 250 - 30$; que l'on ait $60 - \frac{1}{4}x = 250 - \frac{7}{3}x$, on en tire $\frac{7}{3}x - \frac{1}{4}x = 250 - 60$ & ainsi des autres.

XIII.

Lorsqu'après les transpositions nécessaires, on aura fait passer tous les termes affectés de x d'un côté & les termes connus de l'autre; ce qui se présente le plus naturellement c'est de réduire chacun des deux membres de l'Equation à la plus simple expression. Qu'on ait par exemple $8x - \frac{1}{3}x = 250 - 30$ on en tire aussitôt $\frac{23}{3}x = 220$, en retranchant en effet 30 de 250, & en retranchant aussi $\frac{1}{3}x$ de $8x$ ou de $\frac{24}{3}x$ qui lui est égal.

Qu'on ait $\frac{7}{3}x - \frac{1}{4}x = 250 - 60$ on la change en $\frac{13}{12}x = 190$ à cause qu'en réduisant $\frac{7}{3}x$ & $\frac{1}{4}x$ au même dénominateur on a $\frac{28}{12}x$ & $\frac{3}{12}x$ dont la différence est $\frac{25}{12}x$, & qu'en retranchant 60 de 250 il reste 190.

XIV.

Par de semblables réductions qui sont toujours faciles à ceux qui sçavent l'Arithmétique on changera toutes les Equations du premier

dégré, quelques composées qu'elles soient en d'autres qui n'auront que deux termes, l'un étant composé d'un certain nombre d' x entier ou rompu, l'autre étant un terme entièrement connu, telles que sont les Equations $4x = 8200$, $\frac{7}{3}x = 53200$ & résolues dans les Articles v. & vi.

Rappelons nous maintenant ce que nous avons dit sur ces Equations, & nous en tirerons des principes généraux pour toutes les autres.

De l'Equation $4x = 8200$ nous avons tiré $x = \frac{8200}{4}$ parce qu'il s'ensuivoit de ce que quatre x valoient 8200, qu'un x ne pouvoit valoir que le quart de cette somme, de ce raisonnement & de ceux que l'on formeroit pareillement pour les autres nombres d' x , on tire ce principe général, qu'on peut ôter le multiplicateur qui affecte l'inconnue dans un des membres de l'Equation, en le faisant servir de diviseur à l'autre membre.

Maniere de faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue.

XV.

De l'Equation $\frac{7}{3}x = 53200$ nous avons tiré $7x = 3 \times 53200$ en remarquant que si le tiers de $7x$ vaut 53200, $7x$ entiers doivent valoir trois fois davantage. Delà on forme ce principe général, que pour faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue dans un membre de l'Equation, on n'a qu'à le faire servir de multiplicateur à l'autre membre.

Maniere de faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue.

XVI.

Avec ces regles on est en état de résoudre toutes sortes d'Equations du premier degré.

Pour exercer les Commençans: voici quelques exemples.

Exemples
d'Equations
du premier
degré réso-
lues par les
principes
précédens.

$\frac{6}{7}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$ se change par la transposition en $\frac{6}{7}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$ ou en réduisant $\frac{6x}{7} - \frac{2x}{3} = 8$ ou $\frac{18}{21}x - \frac{10}{21}x = 8$ ou $\frac{8}{21}x = 8$ ou $8x = 8 \times 21$ ou en dernier lieu $x = 21$.

De même $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ devient en transposant $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 10 + 9$ ou $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 19$ ou $\frac{7}{21}x - \frac{6}{21}x = 19$ ou $x = 399$.

Enfin $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ donne en transposant $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, qui en réduisant d'abord $\frac{2}{9}$ & $\frac{1}{4}$ au même Dénominateur devient $\frac{7}{5}x - \frac{1}{36}x = 100$, & qui en réduisant $\frac{7}{5}$ & $\frac{1}{36}$ au même Dénominateur devient ensuite $\frac{247}{180}x = 100$ ou $x = \frac{18000}{247}$.

X V I I.

Au lieu de réduire toutes les fractions au même Dénominateur, on peut faire disparaître l'un après l'autre tous les Diviseurs de l'Equation donnée par la méthode suivante qui a dû être bien-tôt imaginée par les premiers qui ont manié ces sortes d'Equations.

Maniere de
faire éva-
nour les
fractions
d'une Equ-
ation.

Soit repris l'exemple précédent $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, il est clair que si on multiplie les deux membres de cette Equation par 9, les deux produits seront les mêmes; car des quantités égales multipliées par le même nombre doivent donner le même produit, on aura par cette multiplication $\frac{18}{9}x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$ qui, à cause que $\frac{18}{9}x = 2x$, se ré-

duit à $2x - \frac{2}{4}x + \frac{63}{1}x = 900$, dans laquelle le Diviseur 9 a disparu, & l'on voit bien que cela devoit arriver nécessairement, car $\frac{2}{9}$ de quelque quantité que ce soit multipliés par 9 doivent donner 2 entiers de cette même quantité. Pour faire disparaître de même 4, il faudra multiplier tous les termes de l'Equation par 4, en observant seulement pour le terme $\frac{2}{4}x$ que la multiplication par 4 se fera en ôtant le 4 de dessous. Ainsi l'on aura $8x - 9x + \frac{252}{1}x = 3600$ ou $\frac{252}{1}x - x = 3600$, qui, multipliant les deux membres par 5; deviendra $252x - 5x = 18000$ ou $247x = 18000$ ou $x = \frac{18000}{247}$.

Le principe général qu'on tire de-là, c'est que pour faire disparaître un Diviseur d'un terme, il faut multiplier tous les autres termes par le Diviseur, & l'ôter du terme où il est.

XVIII.

On peut trouver une maniere de faire disparaître tous les Diviseurs à la fois, en remarquant que si on multiplie tous les termes par un même nombre qui puisse se diviser par chacun de ces Diviseurs, chaque terme se réduira. Multiplions par exemple l'Equation $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{1}x = 100$ par 180 qui peut se diviser par 9, par 4 & par 5; on aura $\frac{360}{9}x - \frac{180}{4}x + \frac{1260}{1}x = 18000$ ou $40x - 45x + 252x = 18000$ ou $247x = 18000$.

Autre méthode par laquelle on les fait tous évanouir à la fois.

Or pour trouver ce nombre qui puisse se diviser par tous les Diviseurs, il ne faut que multiplier successivement ces Diviseurs les uns par les autres. Qu'on ait, par exemple,

$\frac{7}{3}x + \frac{1}{5}x = 160 - \frac{2}{7}x$ dont on veuille faire évanouir les Diviseurs, je multiplie d'abord 3 par 5, & je multiplie ensuite leur produit 15 par 7, ce qui me donne 105 pour le nombre qui est divisible par 3, 5, 7: ce nombre trouvé, je m'en sers pour multiplier toute l'Equation, ce qui me donne $\frac{735}{3}x + \frac{105}{5}x = 16800 - \frac{210}{7}x$ ou $245x + 21x = 16800 - 30x$

Pour abreger encore cette operation, au lieu de former le produit 105 des trois Diviseurs, on peut se contenter d'écrire ainsi ce produit $3 \times 5 \times 7$ la multiplication donne alors $\frac{7 \times 5 \times 7}{3}x + \frac{7 \times 5 \times 7}{5}x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - \frac{7 \times 5 \times 7}{7}x$ dans laquelle on voit tout de suite que le nombre 3 doit s'en aller du numerateur de la premiere fraction, puisque la division par 3 doit être détruite en faisant la multiplication par 3, & de même du 5 & du 7, qui sont à la fois aux numerateurs & aux diviseurs des autres fractions.

Par ce moyen on arrive à l'Equation $7 \times 5 \times 7x + 7 \times 3x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 3 \times 5x$ qui en faisant les multiplications indiquées par les signes \times donne $245x + 21x = 16800 - 30x$ délivrée de fractions.

X I X.

Pour suivre le plus vraisemblablement qu'il est possible l'ordre des inventeurs, nous ne nous arrêterons pas maintenant à approfondir davantage la méthode de dégager l'inconnue, mais nous reviendrons à la maniere de mettre les Problèmes en équations; la résolution des équations a pû, indépendamment des Problèmes auxquelles elles ont rapport, occuper les

Algebristes

Algebristes lorsque cette Science a été avancée à un certain point , mais il est à présumer que ceux qui en ont jetté les fondemens , n'ont examiné les Equations qu'à l'occasion des Problèmes dont elles étoient , pour ainsi dire , le dénouement. D'ailleurs il se trouve quelquefois dans les Equations des complications dont on ne se seroit pas douté, si la nature des Problèmes qu'on cherchoit ne les avoit pas amenées.

Nous ne pouvons rien dire ici de plus net , sur la maniere générale de mettre les Problèmes en équations , que ce que nous avons dit art. VIII. mais nous allons donner plusieurs exemples qui accoutumeront les Commençans à cette recherche.

Pour payer un certain nombre d'Ouvriers sur le pied de 3 lb chacun , il manque 8 lb à un homme qui les fait travailler , mais en ne leur donnant chacun que 2 lb il lui reste 3 lb , on demande combien cet homme a d'argent.

Troisième
Problème.

Soit x le nombre de livres que possède cet homme , donc $x + 8$ est la somme qui peut satisfaire tous les Ouvriers sur le pied de 3 lb &c comme le nombre des Ouvriers doit être trois fois plus petit que celui qui exprime cette somme , il sera exprimé par le tiers de $x + 8$, ce qu'on écrira ainsi , $\frac{x+8}{3}$; car en Algebre comme en arithmetique une barre horizontale indique toujours la division de la quantité supérieure par l'inférieure.

On employe
une barre en
algebre com-
me en arith-
metique pour
indiquer la
Division,

De plus puisqu'il reste 3 lb quand on ne donne que 2 lb à chaque Ouvrier , $x - 3$ est donc la somme suffisante pour payer tous

B

ces Ouvriers à raison de 2^{ts} chacun. Donc $\frac{x-3}{2}$ peut exprimer le nombre d'Ouvriers, mais puisque nous avons deux valeurs du même nombre, il faut qu'elles soient égales, le Problème est donc réduit à la résolution de l'Equation

$$\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$$

Pour le résoudre nous commencerons par faire disparaître le diviseur 2 du membre $\frac{x-3}{2}$ de cette Equation, en multipliant l'autre membre par ce même nombre 2, ce qui changera l'Equation en $x-3 = \frac{2x+16}{3}$; car il est évident que le double de $\frac{x-3}{2}$ est $x-3$ & que le double de $\frac{x+8}{3}$ sera $\frac{2x+16}{3}$ par la même raison que $2x+16$ est le double de $x+8$. On fera ensuite évanouir le diviseur 3 de l'Equation $\frac{2x+16}{3} = x-3$, en multipliant le second membre par 3 & en l'ôtant du premier, ce qui donnera $2x+16 = 3x-9$ ou $x=25$.

Si on veut sçavoir à présent combien il y a d'Ouvriers, il faut prendre une des deux expressions $\frac{x-3}{2}$ ou $\frac{x+8}{3}$ qu'on a trouvées pour ce nombre, $\frac{x-3}{2}$ par exemple. Puisqu'on sçait maintenant que $x=25$, $x-3$ sera donc 22, $\frac{x-3}{2}$ partant sera $\frac{22}{2} = 11$ nombre d'Ouvriers demandé.

X X.

Il est bon de remarquer à propos de l'Equation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$, qu'il ne seroit pas permis pour y appliquer la regle de l'art. xi. de changer de côté & de signe les quantités -3 & $+2$, &

d'écrire ainsi l'Equation $x - 8 = \frac{x+1}{3}$, parce que nombre -3 n'est pas proprement un terme du premier membre, mais seulement un terme de son dividende $x - 3$; la quantité de $x - 3$ n'étant réellement qu'un seul terme de l'Equation, ainsi que $\frac{x+1}{3}$. Pour appliquer donc la règle de l'art. XI. il faudroit commencer par prendre, ainsi qu'il est indiqué par le nombre 2 qui est sous la première barre, la moitié de $x - 3$; ce qui donneroit $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; ensuite il faudroit prendre, à cause du 3 qui est sous l'autre barre, le tiers de $x - 8$ qui seroit $\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$, égalant alors ces deux quantités on auroit l'Equation $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$, dans laquelle on pourroit faire les transpositions qu'on voudroit.

XXI.

Le Problème précédent pourroit encore être résolu de la manière suivante.

Que y exprime le nombre d'Ouvriers, $3y$ sera l'argent qu'il faudroit leur donner sur le pied de 3 lb. chacun. Mais il manque 8 lb. pour les satisfaire à ce prix : donc $3y - 8$ est l'argent que possède celui qui les doit payer.

D'un autre côté $2y$ seroit ce qu'il faudroit pour payer ces Ouvriers à raison de 2 lb. & il resteroit en ce cas 3 lb. Donc $2y + 3$ est une autre expression de l'argent que possède celui qui les doit payer.

Il faut donc évaluer les deux quantités $2y + 3$ & $3y - 8$, ou ce qui revient au même, il faut résoudre l'Equation $2y + 3 = 3y - 8$ pour

B ij

Autre solution du même Problème.

avoir la valeur de y . Cette Equation étant résolue par les principes précédens, ce qui est fort facile, on aura 11 pour y , c'est-à-dire pour le nombre d'Ouvriers demandé.

XXII.

Quatrième
Problème.

Un Courrier est parti d'un lieu, il y a 9 heures & fait 5 lieues en 2 heures, on envoie un autre Courrier après lui, dont la vitesse est telle qu'il fait 11 lieues en 3 heures; Il s'agit de savoir où ce second Courrier attrapera le premier.

Soit x le chemin que le second Courrier fera avant d'avoir attrapé le premier, il est évident que ce chemin doit être égal à celui que le premier Courrier avoit fait pendant ses 9 heures d'avance, plus au chemin que le même premier Courrier fait pendant le temps que marche le second Courrier. Pour trouver d'abord le chemin que le premier Courrier avoit fait pendant 9 heures, il faut faire cette proportion * ou règle de trois.

Comme 2 heures sont à 5 lieues ainsi 9 heures sont à un quatrième terme qui, suivant les règles connues en Arithmétique, se trouvera en multipliant le second terme 5 de la proportion par le troisième 9, & en divisant leur produit par le premier 2; & qui sera par conséquent $\frac{45}{2}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier pendant les 9 heures.

* Je suppose ici, ou qu'on ait lû dans mes Elemens de Geometrie les Articles 1x, x, &c. de la seconde Partie, dans lesquels on traite des proportions, ou qu'au moins on possède bien la règle de trois expliquée dans tous les livres d'Arithmétique.

Mais comme en Algèbre on veut écrire toujours le plus courtement qu'il est possible ses opérations, voici comment on dénote cette proportion;

Manière
dont on ex-
prime les
proportions
en Algèbre.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{heures} & & \text{lieues} & & \text{heures} & & \text{lieues} \\ 2 & : & 5 & = & 9 & : & \frac{41}{2} \end{array}$$

Les signes: servant, l'un à comparer 2 à 5, & l'autre 9 à $\frac{41}{2}$ & le signe = servant à marquer l'égalité, qui doit être entre le rapport de 2 à 5 & celui de 9 à $\frac{41}{2}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le même Courrier fera pendant le temps que le second Courrier fera le chemin x , on cherchera premièrement le temps qu'il faut au second Courrier pour faire le chemin x , ce qui se trouvera par cette proportion;

$$\begin{array}{ccccccc} \text{heures} & & \text{lieues} & & \text{heures} & & \text{lieues} \\ 11 & : & 3 & = & x & : & \frac{3x}{11} \end{array}$$

par laquelle on apprend que sans s'embarasser du nombre de lieues contenues dans x , il suffit de multiplier ce nombre par 3 & de le diviser par 11, pour avoir le nombre d'heures qu'il faut au second Courrier pour le parcourir.

Sans faire attention maintenant si le nombre d'heures exprimé par $\frac{3}{11}x$ est connu, ou s'il est inconnu, on fera cette proportion.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{heures} & & \text{lieues} & & \text{heures} & & \text{lieues} \\ 2 & : & 5 & = & \frac{3}{11}x & : & \frac{5}{11}x \end{array}$$

dont le quatrième terme $\frac{5}{11}x$ exprime le chemin du premier Courrier, pendant le temps $\frac{3}{11}x$ c'est-à-dire avant d'être attrapé.

Par ce moyen on a la même quantité exprimée de deux façons différentes, car le chemin

du second Courrier a premierement pour expression x , en second lieu il est la somme des $\frac{41}{2}$ lieues d'avance qu'avoit le premier Courrier sur lui, & des $\frac{11}{12}x$ que ce même premier Courrier devoit avoir fait, jusqu'à ce qu'il fut attrapé. Egalant donc ces deux expressions, on aura l'Equation $x = \frac{41}{2} + \frac{11}{12}x$ qui donne par les regles précédentes $x = 70 + \frac{1}{2}$.

XXIII.

Si le premier Courrier, outre l'avantage qu'il a d'être parti plutôt, avoit encore celui d'être parti d'un lieu plus avancé, la question, quoique plus compliquée, seroit aisément réduite aux mêmes principes.

Que le premier Courrier par exemple allant en Espagne, soit parti d'Orleans le lundi à 8 heures du soir en faisant 7 lieues en 3 heures; & que le second Courrier allant après le premier soit parti le mardi matin à 10 heures de Paris, supposé à 34 lieues d'Orleans, en faisant 13 lieues en 4 heures, on demande le lieu de leur rencontre.

Pour résoudre cette question il faut prendre la différence de 8 heures du soir, à 10 heures du matin, ce qui donne 14 heures; & comme le premier fait 7 lieues en 3 heures, on aura par cette proportion

$$\begin{array}{ccccccc} \text{heures} & \text{lieues} & \text{heures} & \text{lieues} & & & \\ 3 & : 7 & = & 14 & : & \frac{28}{3} \end{array}$$
 lesquelles étant ajoutées avec les 34 lieues d'avance donneront $34 + \frac{28}{3}$ ou $\frac{100}{3}$ lieues pour la distance de Paris où étoit le premier Courrier, lorsque le second est parti. Ensuite on fera comme ci-dessus cette proportion.

$\begin{array}{cccc} \text{lieues} & \text{heures} & \text{lieues} & \text{heures} \\ 13 : 4 & = x : \frac{4}{13} x \end{array}$
 nombre d'heures nécessaires au second Courrier pour faire le chemin x .

Mais pendant ce même nombre d'heures, le premier Courrier aura fait un chemin qu'on trou-

vera ainsi
 $\begin{array}{cccc} \text{heures} & \text{lieues} & \text{heures} & \text{lieues} \\ 3 : 7 & = \frac{4}{13} x : \frac{28}{39} x \end{array}$

L'on aura donc l'Equation $x = \frac{28}{39} x + \frac{106}{3}$ d'où l'on tire par les regles expliquées ci-dessus $x = 236 + \frac{4}{11}$, chemin du second Courrier, lorsqu'il aura attrappé le premier.

XXIV.

Lorsque les premiers Algebristes ont eu trouvé la solution de quelque question qui les intéresseoit, ils n'ont gueres manqué d'en faire différentes applications en variant les nombres donnés dans ces questions. Par exemple ils auront repeté plusieurs fois la question précédente, en changeant les rapports des vitesses des Courriers, & la distance entre leurs départs. Dans ces différentes applications ils ont senti qu'il y avoit une partie de l'operation qu'on repetoit à chaque exemple particulier du même Problème, & qui pouvoit se faire une fois pour toutes en cherchant quelque solution où l'on ne se restreignit point à tel ou tel nombre particulier, mais qui fut générale pour tout nombre donné. Pour faire voir ce qu'ils ont imaginé à ce sujet, nous allons reprendre le Problème précédent, & le traiter le plus généralement qu'il nous sera possible.

Solution du
Problème
précédent
pris généra-
lement.

Soit exprimée la distance qui est entre les deux Courriers par la lettre a
on fera de cet a le nombre de lieues qu'on voudra, lorsque la question sera poussée jusqu'à la fin.

Soit exprimée ensuite le nombre d'heures dont le départ du premier Courrier a précédé celui du second par la lettre b

Que la vitesse du premier Courrier soit telle qu'il fasse le nombre de lieues c
pendant le nombre d'heures d

Que la vitesse du second Courrier soit telle qu'il fasse le nombre de lieues e
dans le nombre d'heures f

Soit enfin comme dans la solution particulière le chemin que le second Courrier doit faire pour joindre le premier x

On employe
les premières
lettres de
l'Alphabet,
pour exprimer
ce que
l'on connoit,
& les der-
nières pour
ce qu'on ne
connoit pas.

C'est une attention qu'on a communément dans l'Algebre, de prendre les premières lettres a, b, c , &c. de l'Alphabet, pour exprimer les quantités connues & les dernières s, t, u, x , &c. pour celles qu'on cherche.

Pour trouver présentement à l'exemple de la méthode qu'on a suivie dans l'exemple précédent, le chemin que fait le premier Courrier pendant le nombre d'heures b , il faudra chercher le quatrième terme d'une proportion, dont le premier terme soit le nombre d'heures d , le second le nombre de lieues c , le troisième le nombre d'heures b , & il est clair que cette opération se fera, comme dans toutes les autres règles de trois, en multipliant le second & le troisième terme, l'un par l'autre, & en divisant

leur produit par le premiere terme.

Quant à la maniere d'exprimer le produit de ces termes qui ne sont plus comme ci-dessus des chiffres, mais des lettres propres à exprimer des nombres quelconques, ce qu'on a trouvé de plus simple c'est de placer à côté l'une de l'autre, les lettres qu'on veut multiplier, à l'égard de la division, nous avons déjà vû qu'en Algebre comme en Arithmetique, on mettoit une barre horizontale entre les quantités qu'on veut diviser.

Les lettres qui se suivent sans aucun signe entr'elles sont censées se multiplier.

Par ce moyen la proportion précédente s'écrit ainsi $d : c = b : \frac{bc}{d}$

Ayant donc $\frac{bc}{d}$ pour exprimer le chemin que le premier Courrier a fait avant que le second soit parti, si on ajoute à ce chemin la distance a qui étoit entr'eux, on aura pour le chemin d'avance du premier au moment du départ du second $a + \frac{bc}{d}$

Pour trouver ensuite le chemin que le premier Courrier fait pendant que l'autre court après lui & qu'il parcourt x ; commençons ainsi que ci-dessus par trouver le temps que le second Courrier met à parcourir l'espace x , ce qui se fera par le moyen d'une proportion . . . $e : f = x : \frac{fx}{e}$ dont le premier terme sera le nombre de lieues e , le second le nombre d'heures f , le troisième le nombre de lieues x & le quatrième $\frac{fx}{e}$ le tems cherché.

Or quel que soit le nombre d'heures $\frac{fx}{e}$ qu'ait couru le second Courrier pour attrapper le pre-

mier, on ſçait que ſi on fait une proportion dont les trois premiers termes ſoient 1°. le nombre d'heures d , 2°. le nombre de lieues c ; 3°. le nombre précédent $\frac{fx}{c}$, le quatrième terme fera le chemin que le ſecond a fait dans le même temps que le premier Courier a fait x .

Cette proportion s'écrira ainſi $d : c = \frac{fx}{c}$;
 $c \times \frac{fx}{c}$ nombre de lieues faites par le premier

Courrier pendant que le ſecond parcourt x .

Mais le chemin du premier Courier ajoute avec le chemin $a + \frac{bc}{d}$ qu'il avoit d'avance, doit éгалer le chemin du ſecond.

On a donc l'Equation $x = a + \frac{bc}{d} + c \times \frac{fx}{c}$

Si on ſe reſſouvient des opérations des fractions, on doit ſçavoir que pour multiplier une fraction comme $\frac{c}{3}$ par 4 il faut multiplier le numérateur * & écrire $\frac{c \times 4}{3}$ ou $\frac{4c}{3}$. De même pour multiplier $\frac{fx}{c}$ par c il faut multiplier c par fx & laiſſer le diviſeur c , ce qui donne $\frac{cfx}{c}$ pour

* On doit avoir vû dans l'Arithmetique, que le numérateur d'une fraction eſt le nombre placé au deſſus de la barre, & qui ſert de Dividende; de même qu'on appelle denominateur, le nombre qui eſt au deſſous de la barre & qui ſert de diviſeur. Les opérations d'Arithmetique que je ſuppoſe ici, & dans beaucoup d'autres endroits de cet ouvrage, ſont expliquées aſſez clairement dans pluſieurs livres. Pour éviter cependant aux Lecteurs la peine d'y recourir. Je vais en peu de mots rappeler ces opérations & les raiſons ſur leſquelles elles ſont fondées.

$c \times \frac{f}{e}$. On sçait de plus que quand on divise une fraction comme $\frac{f}{e}$ par un nombre quelconque comme 6, il faut multiplier le dénominateur 3 par ce nombre 6, ce qui donne $\frac{f}{3 \times 6}$ ou $\frac{f}{18}$. De même pour diviser la fraction $\frac{f}{e}$ par d il faut écrire $\frac{f}{d \times e}$.

Pour multiplier une fraction telle que $\frac{5}{7}$ par 8 on multiplie le numérateur 5 par 8, & l'on écrit le même diviseur 7 sous leur produit 40, ce qui donne $\frac{40}{7}$ la raison en est claire, car 8 fois 5 septièmes doivent faire 40 septièmes, comme 8 fois 5 grandeurs quelconques font 40 de ces mêmes grandeurs.

Pour diviser $\frac{1}{5}$ par 4, il faut écrire sous le numérateur 3 le produit 10 de 4 par le dénominateur 5, ce qui donne $\frac{3}{10}$. La raison en est que 1 cinquième devenant 1 vingtième, lorsqu'on le divise par 4, 3 cinquièmes doivent devenir 3 vingtièmes par la même division.

Pour multiplier $\frac{1}{7}$ par $\frac{8}{3}$ on multiplie les numérateurs 5 & 8, & on divise leur produit 40 par le produit 41 des dénominateurs 3 & 7 ce qui donne $\frac{40}{21}$. Cette opération est fondée sur ce que le produit de $\frac{8}{3}$ par $\frac{1}{7}$ doit être 3 fois plus petit que celui de 8 par $\frac{1}{7}$, mais 8 par $\frac{1}{7}$ a donné $\frac{8}{7}$ donc $\frac{8}{3}$ par $\frac{1}{7}$ doit donner le tiers de $\frac{8}{7}$ c'est-à-dire $\frac{8}{21}$.

Enfin pour diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{11}$ il faut multiplier le numérateur 3 de la première fraction par le dénominateur 11 de la seconde, & diviser leur produit 33 par le produit 20 du dénominateur 5 de la première fraction & du numérateur 4 de la seconde, ce qui donne $\frac{33}{20}$. Opération dont on voit la raison en remarquant que $\frac{3}{4}$ divisés par 4 donneroient $\frac{3}{16}$ & que $\frac{3}{4}$ divisés par $\frac{4}{11}$ qui sont 11 fois plus petits que 4 doivent donner un quotient 11 fois plus grand, c'est-à-dire $\frac{33}{16}$.

Ayant ainsi changé l'Expressiion précédente
 $c \times \frac{fx}{d}$ en $\frac{cfx}{de}$ l'Equation qu'on doit résoudre

est $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$. Operation qui demande qu'on commence, ainsi qu'on l'a enseigné Art. XVIII. par multiplier tous les termes, excepté le dernier par le diviseur de afin de l'ôter de ce terme.

Nous aurons par cette operation $dex = ade + \frac{bcde}{d} + cfx$ on $dex = ade + bce + cfx$ à cause que $\frac{bcde}{d}$ est la même chose que bce puisque la quantité bce reste la même lorsqu'on la multiplie & qu'on la divise par d .

Passant le terme cfx dans le premier membre on aura $dex - cfx = ade + bce$.

Afin de trouver x dans cette Equation, nous remarquerons que si nous connoissons les nombres de , & cf qui expriment ce que contiennent d' x les termes dex , & cfx , nous retrancherions le second du premier, & que le reste qui exprimeroit la quantité d' x contenues dans le premier membre de l'Equation, serviroit de diviseur au second membre pour avoir la valeur de x . Or sans connoître les nombres de , & cf , il est clair que $de - cf$ exprime leur différence, & par conséquent la quantité d' x que contient le premier membre de l'Equation $dex - cfx = ade + bce$. Donc x a pour valeur ce qui vient en divisant le second membre par ce nombre $de - cf$. Donc $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$

& c'est là la solution générale du Problème pré-

cèdent , car qu'on sçache à présent ce que c'est que a, b, c, d, e, f , on n'aura plus qu'à en faire l'usage indiqué par cette valeur générale de x , c'est-à-dire, multiplier successivement a, d, e , l'un par l'autre : ajouter à ce produit celui que l'on a en multipliant successivement b, c, e , & diviser la somme de ces deux produits, par le nombre qui est la différence du produit de c par f au produit de d par e , & l'on aura par cette opération telle solution particulière qu'on voudra.

XXV.

Supposons, par exemple, comme dans l'Art. xxiii. que la distance entre les deux Courriers soit de 34 lieues, que le premier Courrier soit parti 14 heures plutôt que le second, qu'il fasse 7 lieues en 3 heures, & que le second fasse 13 lieues en 4 heures, on aura

Application de la solution précédente à des nombres.

$$a = 34, b = 14, e = 7$$

$$d = 3, c = 13, f = 4$$

qui donneront $ade = 34 \times 3 \times 13$, c'est-à-dire
 $= 102 \times 13 = 1326,$

$$bce = 14 \times 7 \times 13 = 1274$$

& par conséquent $ade + bce = 2600$

$$de = 39, cf = 28 \text{ \& partant } de - cf = 11$$

D'où l'on tirera $x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{2600}{11} = 236 + \frac{4}{11}$
 ainsi qu'on l'a trouvé dans l'Art. xxiii.

Si on veut ensuite tirer de la solution générale le premier cas calculé dans l'art. xxii où les deux Courriers étoient supposés partir du même lieu, le premier ayant 9 heures d'avance, & une vitesse capable de lui faire faire 5 lieues en 2 heures, tandis que le second en fait

Autre application.

11 en 3. On aura dans ce cas

$$a=0, b=9, c=5,$$

$$d=2, e=11, f=3,$$

& substituant ces valeurs dans la formule générale ou valeur de x on aura $x = \frac{0 \times 1 \times 11}{2 \times 1 - 1 \times 3} =$

$$\frac{491}{7} = 70 + \frac{1}{7} \text{ ainsi qu'on l'a trouvé dans}$$

l'art. XXII. On fera de même tant d'autres applications qu'on voudra.

XXVI.

On n'a pas eu plutôt trouvé la manière de généraliser un Problème en se servant de lettres au lieu de nombres, qu'on a presque toujours pris les Problèmes dans leur plus grande généralité, il faut donc accoutumer les Commencans à les traiter ainsi. Dans cette vue nous allons résoudre le Problème suivant.

Cinquième
Problème.

Un Ouvrier peut faire un certain ouvrage exprimé par a dans un tems exprimé par b ; un second fait l'ouvrage c dans le tems d , un troisième l'ouvrage e dans le tems f , on demande quel tems il faudra à ces trois Ouvriers travaillant ensemble pour faire l'ouvrage g

Soit x le tems cherché on aura l'ouvrage fait par le premier dans ce tems, en faisant la proportion suivante:

$$b : a = x : \frac{a x}{b}$$

On aura l'ouvrage fait dans le même tems par le second Ouvrier en faisant la proportion

$$d : c = x : \frac{c x}{d}$$

Enfin on aura l'ouvrage fait dans le même tems

par le troisiéme Ouvrier par le moyen de cette proportion $f : e = x : \frac{ex}{f}$.

Donc $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b}$ est l'ouvrage des trois Ouvriers travaillant ensemble pendant le tems cherché, mais cet ouvrage doit éгалer g , on a donc l'Equation $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} = g$.

Pour la résoudre on multipliera suivant les principes de l'article XVIII. toute l'Equation par le produit $f d b$ des diviseurs, & l'on aura $\frac{edfbx}{f} + \frac{cdbfx}{d} + \frac{axfdb}{b} = bdfg$ qui se réduit à $edb x + fcb x + adf x = fbdg$, dans laquelle remarquant que $edb + fcb + adf$ doit exprimer le nombre d' x contenus dans le second mem-

bre, on aura $x = \frac{b d f g}{bde + bcf + adf}$

X X V I I.

Pour faire quelqu'application de ce Problème, Exemple en nombres. supposons qu'un Maïson ait pû faire 7 pieds courans d'une muraille en 5 jours, qu'un second Maïson en ait pû faire 10 pieds en 3 jours, & un troisiéme 11 en 4 jours, on demande le tems dans lequel ces trois Maïsons travaillant ensemble feront 150 pieds courans de la même muraille.

On aura par ces suppositions

$$a = 7; b = 5; c = 10; d = 3; e = 11, \\ f = 4, g = 150,$$

$$\& \text{ partant } bdfg = 5 \times 3 \times 4 \times 150 = 9000 \\ bde = 5 \times 3 \times 11 = 165; bcf = 5 \times 10 \times 4 = 200 \\ adf = 7 \times 3 \times 4 = 84, \text{ ce qui donnera pour la}$$

valeur de x , $\frac{9000}{449}$ ou $20 + \frac{20}{449}$ nombre de jours dans lequel l'ouvrage proposé sera fait.

XXVIII.

Autre exemple.

Supposons maintenant qu'on demande en quel tems un reservoir de 200 pieds cubes sera rempli par trois tuyaux dont le premier pourroit remplir 9 pieds cubes en $2\frac{1}{2}$ jours, le second 15 pieds cubes en $3\frac{1}{3}$ jours, & le troisième 19 pieds cubes en $5\frac{1}{4}$ jours; . . .
 $a=9$; $b=2\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$; $c=15$; $d=3\frac{1}{3}$ ou $\frac{10}{3}$;
 $e=19$; $f=5\frac{1}{4}$ ou $\frac{21}{4}$; $g=200$.

Par les substitutions on aura

$$x = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4} \times 200}{\frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times 19 + \frac{1}{3} \times 15 \times \frac{21}{4} + 9 \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4}}$$

qui devient

$$\frac{210000}{2 \times 3 \times 4} = \frac{950}{2 \times 3} + \frac{1575}{2 \times 4} + \frac{1890}{3 \times 4}$$

Pour réduire cette quantité je multiplie le numérateur & le dénominateur de la première fraction du diviseur par 4; le numérateur & le dénominateur de la seconde par 3; & le numérateur de la troisième par 2, ce qui change la

$$\text{quantité en } \frac{210000}{2 \times 3 \times 4} = \frac{3800}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4725}{2 \times 3 \times 4} + \frac{3780}{2 \times 3 \times 4}$$

$$\text{ou } \frac{210000}{2 \times 3 \times 4} \quad \text{ou } \frac{210000}{12305} \quad \text{ou } 17 + \frac{163}{2461}$$

nombre cherché des jours qu'il faudroit pour remplir le reservoir donné en laissant couler les trois tuyaux à la fois.

XXIX.

On voit par les deux Problèmes précédens que les regles qu'on a données (art. x & suiv.) pour résoudre les Equations numériques du premier degré peuvent également s'appliquer aux Equations litterales, mais on voit en même-tems que ces regles sont trop succintes pour que les Comménçans n'ayent pas besoin qu'on les conduise encore dans la maniere de les employer, nous nous croyons d'autant plus obligés à les aider par un grand nombre de ces applications, que c'est probablement à un pareil travail qu'on doit plusieurs opérations d'Algebre très-utiles, que nous allons pour ainsi dire découvrir chemin faisant.

Les regles des art. x & suiv. suffisent pour les Equations litterales.

L'application de ces regles a donné naissance à plusieurs opérations de l'Algebre.

Soit proposé de résoudre l'Equation $2ac + ab - ax = 3ac + 5ab - dx$

Je commence par passer les termes $3ac$ & $5ab$ dans l'autre membre de l'Equation en les changeant de signe ce qui me donne $2ac + ab - ax - 3ac - 5ab = 2ax - dx$. Je passe de même le terme $-ax$ de l'autre côté en observant aussi de changer son signe, ce qui me donne $2ac + ab - 3ac - 5ab = 2ax - dx + ax$. Je réduis ensuite cette Equation, 1° En ajoutant ab avec $5ab$ ce qui me donne $6ab$, 2° En mettant $-ac$ au lieu des termes $2ac$ & $-3ac$; 3° en mettant $3ax$ au lieu de $2ax + ax$; ainsi l'Equation proposée devient $6ab - ac = 3ax - dx$ qui donne

$$x = \frac{6ab - ac}{3a - d}$$

Premier exemple de résolution d'Equations litterales.

Deuxième
exemple de
résolution
d'Equations
littérales.

Soit $5ab + 2ax - 3bd = 2ab - 5ax + 7bd - ac - dx$; les termes $5ab - 3bd$ deviendront $-5ab + 3bd$ en passant dans le second membre & les termes $-5ax - dx$ deviendront $+5ax + dx$ en passant dans le premier; on aura donc $2ax + 5ax + dx = 2ab + 7bd - ac - 5ab + 3bd$ qui se réduit à $7ax + dx = 10bd - 3ab - ac$ en mettant $7ax$ à la place de $2ax + 5ax$, $10bd$ à la place de $7bd + 3bd$, & $-3ab$ à la place de $2ab - 5ab$.

Dégageant présentement x de cette Equation on aura $x = \frac{10bd - ac - 3ab}{7a + d}$

X X X I.

Réduction
des quantités
à leur plus
simple ex-
pression.

Dans la résolution des deux Equations précédentes on a eu besoin de réduire à une plus simple expression différens termes de même espece tels que $2ac$ & $-3ac$; $5ab$ & ab &c. comme cette opération est presque toujours nécessaire dans les Equations à résoudre & dans les tres parties de l'Algebre, les Commenceans doivent chercher à la pratiquer facilement. Pour leur en donner le moyen, voici quelques exemples.

Soit $15abc - 13bcd - 7abc + 29bcd - 5abf + 9abc + 6chi$ à réduire.

On prendra d'abord les termes $15abc$, $-7abc$ & $9abc$ qui sont de même espece, & on ajoutera les deux termes $15abc$ & $9abc$ qui sont l'un & l'autre positifs, c'est-à-

dire, affectés du signe $+$; on retranchera ensuite de leur somme laquelle est $24abc$, le terme $7abc$ à cause qu'il est négatif ou précédé du signe $-$, moyennant quoi $7abc$ sera ce que deviennent les trois termes $15abc - 7abc + 9abc$. De la même manière au lieu de

On appelle termes positifs ceux qui sont précédés de $+$ négatifs ceux qui sont précédés de $-$

$29bcd - 13bcd$ on mettra $16bcd$. Quant aux termes $-5abf$ & $6chi$ qui sont seuls de leurs espèces, on les écrira tels qu'ils sont, ainsi la quantité réduite sera $17abc + 16bcd - 5abf + 6chi$.

Soit $\frac{1}{3}ab - \frac{4}{5}ac + \frac{3}{4}ax - ad + 7ab + \frac{5}{7}ax$, on aura en réduisant $\frac{26}{3}ab + \frac{41}{28}ax - \frac{4}{5}ac - ad$.

La quantité $2acd - 5acb - 3acd + 3acb - 6bfi$ deviendra en réduisant $-acd - 2acb - 6bfi$ qui étant entièrement négative, montre que la quantité qu'on vouloit réduire renfermoit plus de négatif que de positif.

XXXII.

Il est à propos d'avertir ici que la réduction qu'on vient d'apprendre dans les exemples précédens, est absolument la même règle que celle qu'on appelle l'Addition, car lorsqu'on se propose d'ajouter deux quantités quelconques, il suffit de les écrire de suite & de les réduire après à leur plus simple expression: qu'on ait besoin, par exemple, d'ajouter la quantité $6ab - 2ac - 3ad$ avec $3ab + ac - 2ad + bf$, il n'y a autre chose à faire que de réduire la quantité $6ab - 2ac - 3ad + 3ab + ac - 2ad + bf$, ce qui donnera donc $9ab -$

L'Addition algébrique est la même opération que la précédente.

$ac = 5ad + bf$ pour la somme des deux proposées.

Si on veut ajouter les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$, il ne s'agira que de réduire la quantité $2ac - 3ad + af + ad - 5ac - 2af$. La réduction faite il viendra $-3ac - 2ad - af$. On s'étonnera peut-être d'abord qu'une Addition puisse mener à une quantité négative, mais l'on trouvera bien-tôt le dénouement de cette difficulté en remarquant qu'il faut nécessairement, ou que les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$ soient toutes deux négatives, ou qu'au moins l'une des deux soit négative & plus grande que l'autre.

C'est ce qu'on reconnoîtra plus facilement en faisant quelques exemples en nombres. Supposons d'abord que $a=2$, $c=3$, $d=4$; $f=5$, dans ce cas au lieu de $2ac - 3ad + af$ nous aurons $12 - 24 + 10$ ou simplement -2 , & au lieu de $ad - 5ac - 2af$ il viendra $8 - 30 - 20 = -42$. Ainsi leur somme sera -44 , & on ne sera pas étonné que la somme de deux quantités négatives soit négative.

Supposons ensuite que $a=6$; $c=5$; $d=3$; $f=2$ on aura $2ac - 3ad + af = 18$ & $ad - 5ac - 2af = -156$. Or comme la seconde quantité est négative, & plus grande que la première la somme doit être négative.

XXIII.

On demandera peut-être si on peut ajouter du négatif avec du positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoute du négatif. A quoi je réponds que cette expression est exacte quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux personnes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai que c'est là ajouter leurs biens, que l'un ait des dettes & des effets réels, si ses dettes surpassent ses effets, il ne possèdera que du négatif, & la jonction de sa fortune à celle du premier diminuera le bien de celui-ci, en sorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possèdoit le premier, ou même entièrement négative.

Comment on peut dire que l'on ajoute une quantité négative.

XXIV.

La réduction enseignée dans les Articles précédens donne encore naissance à une autre règle d'Algebre, la Soustraction; car, par exemple, lorsque dans l'Equation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$ (art. XXIX.) on a passé les termes $3ac - 5ab$ de l'autre côté en les changeant de signe, & qu'on est arrivé à l'Equation $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$ ou $-ac + 6ab - ax = 2ax - dx$, je dis qu'on a retranché la quantité $3ac - 5ab$ de la quantité $2ac + ab - ax$ & que le reste est $-ac + 6ab - ax$. Car en faisant disparaître $ac - 5ab$ du second membre de l'Equation, c'est une Soustraction qu'on a faite de cette quantité, or pour que l'égalité soit conservée, il faut qu'on ait fait

On tire encore de l'opération précédente la Soustraction algébrique.

une pareille Soustraction de l'autre côté, donc $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$ ou $-ac + 6ab - ax$ est ce qui reste de la quantité $2ac + ab - ax$ lorsqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Procédé de
la Soustrac-
tion.

Ainsi lorsqu'on a deux quantités dont l'une doit être soustraite, il faut changer les signes de celle qu'on veut soustraire, l'écrire à la suite de l'autre, puis faire la réduction des quantités de même espece, ce qui, indépendamment de ce qu'on vient de dire, pourroit se démontrer de la maniere suivante.

Soit la quantité $2ac + ab - ax$ dont on se propose de retrancher la quantité $3ac - 5ab$. Il est évident que si on vouloit retrancher de la premiere quantité simplement $3ac$ il faudroit écrire $2ac + ab - ax - 3ac$, mais en retranchant la quantité $3ac$ au lieu de $3ac - 5ab$ on retranche une quantité trop grande de $5ab$: Donc il faut ajouter les $5ab$ qu'on a ôté de trop en ôtant $3ac$. Donc il faut écrire $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$ pour le reste de $2ac + ab - ax$ lorsqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Afin de s'exercer dans cette regle qu'on sent bien devoir être employée souvent j'ajouterai les exemples suivans.

De $5ab + 10fg - 3ac + 2de$ si on retranche $2ab - 5fg + 6ac + de$, il restera $5ab + 10fg - 3ac + 2de - 2ab + 5fg - 6ac - de$ ou $3ab + 15fg - 9ac + de$.

De la quantité $6acb + 3agh - 10bcd$ si on retranche $abc - 10acb - 8agh$ on aura $16acb - abc - 10bcd + 11agh$

De la quantité $3ac + ab + be$ si on retranche la quantité $-ac - 3ab$ il viendra $4ac + 4ab + be$.

XXXV.

Si on s'étonne que dans cette Soustraction le reste $4ac + 4ab + be$ soit plus grand que la quantité $3ac + ba + be$ dont on se propoisoit de soustraire $-ac - 3ab$, ce ne pourra être qu'en confondant soustraire & diminuer ; car si on reconnoît au contraire que soustraire une quantité quelconque, a par exemple, d'une autre b , c'est sçavoir de combien b surpasse a , on trouvera très-possible qu'une quantité augmente par une soustraction. Qu'on demande, par exemple, de combien un homme est plus riche qu'un autre, si ce dernier n'a que des dettes, on verra bien-tôt que l'excès de richesse du premier sera ce qu'il possède plus une somme égale aux dettes de l'autre.

On augmente une quantité lorsqu'on en soustrait une quantité négative.

XXXVI.

Soit proposé de résoudre présentement l'Equation $\frac{cx}{2a} - \frac{ac}{2b} = x - \frac{4ad}{3c}$ pour faire paroître d'abord le diviseur $2a$, on le fera servir suivant l'art. xv. de multiplicateur à tous les termes de l'Equation, & l'on aura $cx - \frac{ac \times 2a}{2b} = 2a \times x - \frac{4ad \times 2a}{3c}$, mais au lieu de $ac \times 2a$ il est clair qu'on peut mettre $2aac$, puisque le produit de $2a$ par ac doit être double de celui de a par ac & que le produit de a par ac doit être aac . De même $2a \times x$ fera

Troisième exemple de résolution d'Equations littérales.

$2ax$ & $4ad \times 2a$ fera $8aad$, car le produit de ad par a est aad & celui de $4ad$ par $2a$ doit être octuple de celui de ad par a .

L'Equation est donc changée en $cx - \frac{2aac}{2b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$ ou $cx - \frac{aac}{b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$ à cause que $\frac{2aac}{2b}$ ou $\frac{aac}{b}$ sont la même chose; multipliant alors tous les termes de cette Equation par $2b$ elle deviendra $b \times cx - aac = 2ax \times b - \frac{8aad}{3c} \times b$ ou $b \times cx - aac = 2abx - \frac{8aabbd}{3c}$ qui se changera encore en $cbx \times 3c - aac \times 3c = 2abx \times 3c - 8aabbd$ ou $3bccx - 3aacc = 6abcx - 8aabbd$, car les produits de c par cbx , aac & $2abx$, seroient $bccx$, $aacc$, $2abcx$, & par conséquent ceux de $3c$ par les mêmes quantités, doivent être triples, c'est-à-dire, $3bccx$, $3aacc$, $6abcx$, transposant présentement on aura $3bccx - 6abcx = 3aacc - 8aabbd$ qui donne enfin $x = \frac{3aacc - 8aabbd}{3bcc - 6abc}$.

XXXVII.

Dans l'exemple précédent, la multiplication de quelques quantités qui contenoient les mêmes lettres a donné la répétition de ces lettres dans les produits : Or comme les Algebristes cherchent toujours à s'exprimer de la maniere la plus courte, ils ont imaginé au lieu de répéter une lettre plusieurs fois de suite, de ne l'écrire qu'une seule fois, en plaçant au dessus de cette lettre & à sa droite un chiffre, qui désigne le nombre de fois que cette lettre devoit être

Un chiffre placé au dessus & à droite d'une lettre, désigne ce qu'elle auroit été ré-

répétée. Par-là au lieu de l'expression précédente $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$ répétée de fois par la multiplication.

on écrira $x = \frac{3a^2c^2 - 8a^2bd}{3bc^2 - 6abc}$.

Lorsque dans une opération on aura besoin de aaa , c'est-à-dire du produit de aa par a ou de a multiplié par lui-même deux fois de suite, on mettra simplement a^3 . De même au lieu de $cccc$, c^4 . Lorsqu'une lettre est ainsi répétée ou plutôt censée répétée à l'aide d'un chiffre, on dit qu'elle est élevée à la puissance exprimée par ce chiffre, & que ce chiffre est son exposant. Ainsi c^4 ou $cccc$ qui est le produit de c trois fois par lui-même est dit c élevé à la quatrième puissance, & 4 est son exposant. Il faut bien prendre garde de confondre les chiffres qui servent d'exposant avec ceux qui sont à la gauche des lettres & sur la même ligne, ceux-ci sont nommés coefficients; dans $4a^2c$, par exemple, 4 est le coefficient du terme, 2 est l'exposant de a .

Et dans ce cas la lettre est dite élevée à la puissance exprimée par ce chiffre qu'on appelle exposant.

Les chiffres qui sont à gauche & sur la même ligne sont nommés coefficients.

LXXVIII.

Soit l'Equation $\frac{2ab^2x}{3c^2d} + \frac{5ac^2}{b^2} = \frac{6cd^2}{a^2} - 3x$, Quatrième exemple de résolution d'Equations littérales.

en multipliant tous les termes par le diviseur $3c^2d$, on aura $2ab^2x + \frac{5ac^2 \times 3c^2d}{b^2} = \frac{6cd^2 \times 3c^2d}{a^2} - 3x \times 3c^2d$.

Pour faire ensuite les multiplications indiquées par les signes \times , nous remarquerons d'abord que ac^2 multiplié par c^2d doit donner

*

pour produit ac^4d , car si au lieu de ac^3 & de c^2d on écrivoit acc & ccd , ainsi qu'on le pourroit, on verroit tout de suite que le produit de acc par ccd seroit $accccd$, c'est-à-dire suivant l'article précédent ac^4d . Ayant donc ac^4d pour le produit de ac^2 par c^2d , il est clair que $15ac^4d$ sera celui de $5ac^2$ par $3c^2d$.

De la même manière on trouvera $18c^3d^3$ pour le produit de $6cd^2$ par $3c^2d$ & $9c^2dx$ pour celui de $3x$ par $3c^2d$. Donc l'Equation précédente se changera en $2ab^2x + \frac{15ac^4d}{b^2}$

$$= \frac{18c^3d^3}{a^2} - 9c^2dx.$$

Multipliant ensuite cette nouvelle Equation par b^2 elle devient $2ab^4x + 15ac^4d =$

$$\frac{18b^3c^3d^3}{a^2} - 9b^2c^2dx \text{ \& multipliant de même}$$

celle-ci par a^2 , on a $2a^3b^4x + 15a^3c^4d = 18b^3c^3d^3 - 9b^2a^2c^2dx$ qui donne en transposant $2a^3b^4x + 9b^2a^2c^2dx = 18b^3c^3d^3 - 15a^3c^4d$ d'où l'on tire enfin

$$x = \frac{18b^3c^3d^3 - 15a^3c^4d}{2a^3b^4 + 9a^2b^2c^2d}.$$

XXXIX.

Les quantités
incomplexes
sont celles
qui n'ont
qu'un terme.

Multiplia-
tion des
quantités in-
complexes,

Dans les deux exemples précédens on a eu besoin de sçavoir multiplier des quantités exprimées par un simple terme telles que $4ad$, $9c^2d$ &c. qu'on appelle communément quantités incomplexes ou monomes, & l'on a trouvé en même-tems ce qu'il falloit pour faire cette opération. La méthode générale qui résulte des raisonnemens qu'on a employés dans

ces exemples particuliers, c'est de commencer par multiplier les coefficients; d'ajouter ensuite les exposants des mêmes lettres & d'écrire de suite celles qui sont différentes. Ainsi suivant cette règle $3 a^4 b^3 d \times 7 a^2 b d^2 = 21 a^6 b^4 d^3$;
 $\frac{2}{3} a^2 c d \times \frac{1}{5} a c^3 b d = \frac{2}{15} a^3 c^4 b d^2 =$
 $\frac{6}{7} a^3 c^4 b d^2$; $\frac{1}{3} a c^2 d e \times 9 a^4 f g = 6 a^5 c^2 d e f g$.

tirée des
deux Exem-
ples précé-
dents.

XL.

Soit l'Equation $\frac{a^2 c}{2 b^2} + \frac{4 c x}{3 a} = \frac{5 a b}{c} - 3 a$, Cinquième
 en multipliant tous les termes par $2 b^2$ j'aurai exemple de
 $a^2 c + \frac{8 b^2 c x}{3 a} = \frac{10 a b^3}{c} - 6 a b^2$ multipliant en- résolution
 core tous les termes par $3 a$ j'aurai $3 a^3 c + 8 b^2 c x = \frac{30 a^2 b^3}{c} - 18 a^2 b^2$ d'Equations
 & faisant en- littérales.
 core la même opération pour chasser le diviseur
 c il vient $3 a^3 c^2 + 8 b^2 c^2 x = 30 a^2 b^3 -$
 $18 a^2 b^2 c$ d'où l'on tire $x =$
 $\frac{30 a^2 b^3 - 18 a^2 b^2 c - 3 a^3 c^2}{8 b^2 c^2}$ qu'on peut encore écrire
 ainsi $x = \frac{30 a^2 b^3}{8 b^2 c^2} - \frac{18 a^2 b^2 c}{8 b^2 c^2} - \frac{3 a^3 c^2}{8 b^2 c^2}$ puisque
 $8 b^2 c^2$ divisant toute la quantité $30 a^2 b^3 -$
 $18 a^2 b^2 c - 3 a^3 c^2$ divise chacune de ses
 parties.

Or la valeur d' x , ainsi écrite, peut avoir une plus simple expression en réduisant chaque terme. Car 1°. au lieu de $\frac{30 a^2 b^3}{8 b^2 c^2}$ on peut mettre $\frac{15 a^2 b}{4 c^2}$ parce qu'on peut regarder le numérateur, comme le produit de $2 b^2$ par $15 a^2 b$

& le dénominateur comme celui de la même quantité $2b^2$ par $4c^2$, divisant donc l'un & l'autre par la même quantité $2b^2$ il vient $\frac{15a^2b}{4c^2}$; 2°. au lieu de $\frac{18a^2b^2c}{8b^2c^2}$ on peut mettre $\frac{9a^2}{4c}$ car le numérateur est le produit de $2b^2c$ par $9a^2$ & le dénominateur est le produit de la même quantité $2b^2c$ par $4c$. Au lieu de $\frac{3a^3c^2}{8b^2c^2}$ on peut mettre $\frac{3a^3}{8b^2}$. Donc la valeur d' x réduite est $\frac{15a^2b}{4c} - \frac{9a^2}{4c} - \frac{3a^3}{8b^2}$

XLI.

La méthode qu'il faudra suivre généralement dans toutes les opérations de même nature que les précédentes, c'est-à-dire dans les divisions des quantités incomplexes, est aisée à tirer de ce qu'on vient de dire, sur tout après avoir vu la multiplication des quantités incomplexes. On peut énoncer ainsi cette méthode.

Division
des quantités
incomplexes
tirée de cet
exemple,

Diviser d'abord les coefficients si la division est possible, ôter les lettres qui ont les mêmes exposants aux numérateurs & aux dénominateurs, diviser ensuite les lettres qui auront des exposants différens dans le dénominateur & dans le numérateur en retranchant les plus petits exposants des plus grands, & en laissant les exposants résidus du côté où étoient les exposants les plus grands. Quant aux lettres différentes il n'y a autre chose à faire qu'à les copier.

Comme cette operation est très-souvent nécessaire, il est bon de joindre ici quelques exemples pour en faciliter l'usage aux commençans.

$$\frac{9a^4d^2b^2}{3a^4c^2d^2} = \frac{3ab^2}{c^2}, \quad \frac{18a^4bcd}{14ab^2} = \frac{9a^3cd}{7b}$$

$$\frac{27a^3b^2c^5}{3a^2bc^2} = 9abc^3, \quad \frac{7a^2b^4c^2}{15ab^3} = \frac{abc^2}{3}$$

XLII.

Soit l'Equation $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$.

Sixième
exemple de
résolution
d'Equations
littérales.

Pour faire évanouir le diviseur $b - c$ il faudra ainsi que ci-dessus multiplier tous les termes par ce diviseur, ce qui donnera $aax + b - c \times dc = bx - ac \times b - c$, où j'ai observé 1° de mettre une barre au dessus de $b - c$ dans le premier membre, parce que sans cela on pourroit croire qu'il n'y auroit que c qui dut multiplier dc . 2° de mettre des barres au dessus de $bx - ac$ & de $b - c$ dans le second membre, afin qu'on voye que ce sont ces deux quantités entieres qui doivent se multiplier.

C'est une attention qu'il faut avoir toutes les fois qu'on veut désigner des produits ou des puissances de quantités complexes; au lieu d'une barre, on se sert quelquefois de parentheses.

Ainsi $a^4(a+b)$; ou $a^4 \times a+b$ signifient également le produit de a^4 par $a+b$; $(a+b) \times (b+d)$ ou $a+b \times b+d$ le produit de $a+b$ par $a+d$; $(ff+gg)^3$ ou $ff+gg$ la quantité $ff+gg$ élevée à la puissance dont

Usage: des
barres au
dessus des
quantités, le
même que
celui des pa-
rentheses.

l'exposant est 3, c'est-à-dire Art. xxxvii.) multipliée deux fois par elle même.

Il s'agit maintenant de faire les multiplications indiquées par les signes \times . Soit proposé d'abord de multiplier dc par $b - c$, il est clair qu'il faudra multiplier dc par b & en retrancher le produit de dc par c , car $b - c$ étant plus petit que b de c , son produit par dc doit être plus petit que celui de b par c , de la quantité $c \times dc$. Donc le produit de $b - c$ par dc est $bdc - ccd$.

Venons présentement au produit de $bx - ac$ par $b - c$, pour le trouver je commence par remarquer qu'en prenant les deux termes $bx - ac$ pour une seule quantité, son produit par $b - c$ doit être, par ce qu'on vient de voir, la quantité dont le produit de $bx - ac$ par b surpasse le produit de $bx - ac$ par c . La question est donc réduite à deux multiplications de la nature de celles qu'on vient de faire & à une soustraction.

La première de ces deux multiplications, celle de $bx - ac$ par b , donnera $bbx - abc$; la seconde celle de $bx - ac$ par c , donnera $bcx - acc$; reste donc à retrancher cette dernière quantité de la première, ce qui donnera suivant l'Art. xxxiv. $bbx - abc - bcx + ac^2$ & c'est là le produit de $bx - ac$ par $b - c$.

De sorte que l'Equation $\frac{a^2x}{b-c} + cd = bx - ac$ ou $a^2x + \overline{b-c} \times cd = \overline{bx - ac} \times \overline{b-c}$ est devenue $a^2x + bcd - c^2d = b^2x - abc - bcx + ac^2$ qui par les transpositions ordinaires donnera $bcd - c^2d + abc -$

$ac^2 = b^2x - bcx - a^2x$ ou enfin

$$\dots\dots\dots x = \frac{bcd - cd^2 + abc - ac^2}{b^2 - bc - a^2}$$

XLIII.

Dans cet exemple nous avons eu besoin de former une règle d'Algebre, dont nous ne nous étions pas encore servis & qui pouvant être souvent utile, merite que nous nous y arrêtons. On appelle cette règle multiplication des Polynomes. Polynome ou quantité complexe signifie en général une quantité composée de plusieurs termes. Si on veut spécifier le nombre de termes d'une quantité, on l'appelle binome lorsqu'elle en a deux, trinome lorsqu'elle en a trois, &c.

Multiplication des quantités complexes ou Polynomes tirée de l'Art. précédent.

Afin de s'exercer à la multiplication de ces fortes de quantités, il sera bon de prendre quelques exemples, soient premierement $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ & $3ab^2 - 4bcd$ dont il s'agisse de trouver le produit.

Exemple de multiplication de Polynomes

En raisonnant comme dans l'article précédent, on verra que puisque la quantité $3ab^2 - 4bcd$ est plus petite que $3ab^2$ de $4bcd$, son produit par $2a^3c^2 - 5a^4b$ doit être plus petit que celui de $3ab^2$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ du produit de $4bcd$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$.

En conséquence j'écris d'abord ainsi le produit demandé $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5 \times 3ab^2 - 2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5 \times 4bcd$.

Faisant présentement les deux multiplications indiquées par les signes \times de la même manière que celles des quantités incomplexes, on aura $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^2 + 18a^6b^2$ pour la valeur du premier produit $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5 \times$

$3 a b^2$. On aura de même $8 a^3 b c^3 d - 20 a^4 b^2 c d + 24 a^5 b c d$ pour la valeur du second produit $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5 \times 4 b c d$. Retranchant alors le second du premier ainsi qu'il est indiqué dans l'expression précédente, on aura $6 a^4 b^2 c^2 - 15 a^5 b^3 + 18 a^6 b^2 - 8 a^3 b c^3 d + 20 a^4 b^2 c d - 24 a^5 b c d$ pour le produit des deux quantités proposées.

X L I V.

Si le multiplicateur de la quantité précédente outre les deux termes $3 a b^2 - 4 b c d$ avoit encore contenu un autre terme, $- 5 a b c$ par exemple, il est évident que pour avoir le produit total, il auroit fallu retrancher de la quantité précédente le produit de $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$ par $5 a b c$. Car on auroit dit de même que le multiplicateur $3 a b^2 - 4 b c d - 5 a b c$ étant plus petit de $5 a b c$ que le multiplicateur $3 a b^2 - 4 b c d$, son produit par $2 a^3 c^2 + 5 a^4 b + 6 a^5$ doit être plus petit de $5 a b c \times 2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$ que le produit de $3 a b^2 - 4 b c d$ par $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$. Par la même raison s'il y avoit eu un autre terme, $3 a c c$ par exemple, au multiplicateur avec le signe $+$, il auroit fallu ajouter le produit $3 a c c \times 2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$ aux produits précédens.

Principe
fondamental
des Multi-
plications.

En général on voit qu'un multiplicande quelconque, c'est-à-dire une quantité quelconque à multiplier, étant donné avec la quantité qui doit lui servir de multiplicateur, il faudra former tous les produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur & ajouter ou retrancher

retrancher ces produits suivant que les termes qui les auront donnés auront le signe $+$ ou le signe $-$.

Pour exécuter cette opération avec autant d'ordre qu'il est nécessaire, voici le procédé qu'on suit.

XLV.

On commence par écrire le multiplicateur sous le multiplicande, & l'on tire une barre sous le multiplicateur. Pour former ensuite la première ligne du produit que l'on doit écrire sous cette barre, on multiplie le premier terme du multiplicateur par chacun des termes du multiplicande, en observant de laisser à chacun de ces produits, le signe du terme du multiplicande, si le premier terme du multiplicateur n'a aucun signe, & est par conséquent censé avoir le signe $+$.

Méthode
qu'il faut sui-
vre dans la
Multiplica-
tion.

Pour former ensuite la seconde ligne qui doit être écrite sous la première, on multiplie le second terme du multiplicateur par tous les termes du multiplicande, & si ce second terme du multiplicateur a encore le signe $+$, c'est absolument la même opération que pour la première ligne, mais s'il a le signe $-$, à chacun des produits dont cette ligne est composée, on met un signe contraire à celui du terme du multiplicande auquel il a rapport. Toutes les autres lignes du produit étant formées de la même manière, par le moyen des autres termes du multiplicateur multipliés par tous ceux du multiplicande, on tire une barre & l'on fait l'addition ou réduction de tous ces produits particuliers; la quantité qui vient alors est le produit total demandé.

Nous venons de supposer que le premier terme du multiplicateur avoit le signe $+$, si cependant il avoit le signe $-$, on voit bien qu'à l'égard de ce terme comme à l'égard des autres qui auroient aussi le signe $-$, il faudroit observer de prendre les signes contraires à ceux des termes du multiplicande en écrivant le produit de ces termes.

XLVI.

Application
de la métho-
de précédén-
te à un ex-
emple.

Afin d'éclaircir cette méthode appliquons-là à un exemple, soit proposé de multiplier les deux quantités $2ab - 4ac + ad$ & $3ab - 5ac + 2ad$. La première étant prise pour le multiplicande, & la seconde pour le multiplicateur, on écrit cette dernière sous l'autre & on tire ensuite une barre sous ces deux quantités; voyez la première case de la table ci-jointe.

Cela fait, on remarque que le premier terme du multiplicateur est censé positif, & que par conséquent tous les signes des termes de la première bande du produit doivent être les mêmes que ceux du multiplicande. On écrit donc suivant cette remarque à la première ligne sous la barre le premier terme $6a^2b$ que donne le produit de $3ab$ par $2ab$ sans l'affecter d'aucun signe, ce qui est la même chose que si on lui donnoit le signe $+$.

On met ensuite $-$ pour le signe du second terme de la même bande, parce que c'est le signe du second terme du multiplicande, & on fait suivre ce $-$ de $12a^2bc$ produit de $4ac$ & de $3ab$. On conserve de même le signe $+$ du troisième terme du multiplicande pour le

troisième terme de la première bande du produit, & l'on écrit pour ce terme $3a^2bd$ produit de ad & de $3ab$. La première bande du produit étant ainsi achevée, on remarque que le second terme du multiplicateur a le signe $-$, & que par conséquent il faut changer tous les signes du multiplicande pour former les termes de la seconde bande du produit. Ainsi le premier terme de cette seconde bande doit avoir $-$ qu'on écrit donc devant le produit $10a^2bc$ des deux termes $2ab$, $5ac$.

Le second terme de la même bande devant avoir $+$ puisque le second terme du multiplicande a le signe $-$, on écrit donc ce signe $+$ devant le produit $20a^2c^2$ des deux termes $4ac$, $5ac$.

Le troisième terme ad du multiplicande étant précédé du signe $+$, le troisième terme de la seconde bande sera donc affecté du signe $-$ qu'on écrit devant le produit $5a^2cd$ des deux termes ad , $5ac$.

Quant à la troisième bande du produit cherché, comme le troisième terme du multiplicateur a le signe $+$, il faudra garder tous les signes du multiplicande, & par conséquent le premier terme, c'est-à-dire le produit de $2ab$ & de $2ad$, sera $4a^2bd$ précédé du signe $+$, le second, c'est-à-dire le produit de $4ac$ & de $2ad$ sera $8a^2cd$ précédé du signe $-$, & le troisième, c'est-à-dire le produit de $2ad$ par ad sera $2a^2d^2$ précédé du signe $+$.

Afin que les Commencans puissent se fortifier dans la pratique de cette règle, j'ai joint dans

la même Table quelques autres exemples.

X L V I I.

Sixième
exemple de
résolution
d'Equations
littérales.

Soit l'Equation $\frac{ab^2 + abd - abx}{d - c} = ax - ac$

on fera d'abord évanouir le Diviseur $d - c$ en multipliant $ax - ac$ par $d - c$; & l'on aura
 $ab + abd - abx = ax - ac \times d - c$,
 ou $ab^2 + abd - abx = adx - acd - acx + acc$ qui, en passant tous les termes affectés d' x d'un côté & les termes connus de l'autre, deviendra $ab^2 + abd + acd - acc = abx + adx - acx$ d'où l'on tire . . .

$$x = \frac{ab^2 + abd + acd - ac^2}{ab + ad - ac}$$

Dans cette expression, une certaine relation qu'on apperçoit entre les termes du Dividende & ceux du Diviseur, peut faire soupçonner que la Division se feroit exactement, & invite par conséquent à tenter cette operation, qui doit paroître assez aisée à faire après avoir vû celle de la multiplication dont elle est l'inverse.

Maniere
de faire la
division in-
diquée dans
cet exemple.

Pour reconnoître donc si en effet $ab + ad - ac$ peut diviser exactement $ab^2 + abd + acd - acc$. Soit d'abord divisé un des termes de cette dernière quantité par un de ceux de la première, soit divisé ab^2 par ab par exemple & soit écrit à part le quotient b . Soit ensuite multiplié ce quotient b , ou plutôt cette première partie du quotient cherché, par le Diviseur total $ab + ad - ac$, & soit retranché le produit $ab^2 + abd - abc$ du dividende, le reste $ab^2 + abd + acd - acc - ab^2 - abd + abc$, ou $acd - ac^2 + abc$, sera encore à diviser par le même diviseur, & son

Case 1.

d

$$-13a^2cd+2a^2d^2$$

Case 2.

bc²b³c²12a⁴c⁴

$$-10a^3b^3c^3+12a^4c^4$$

$$5ab+3ac-cc$$

Case 4

$$-5ab+3ac-cc$$

$$25a^2b^2-15a^2bc+5abcc$$

$$-15a^2bc+9a^2c^2-3ac^3$$

$$5abc^2-3ac^3+c^4$$

$$25a^2b^2+9a^2c^2-6ac^3+c^4$$

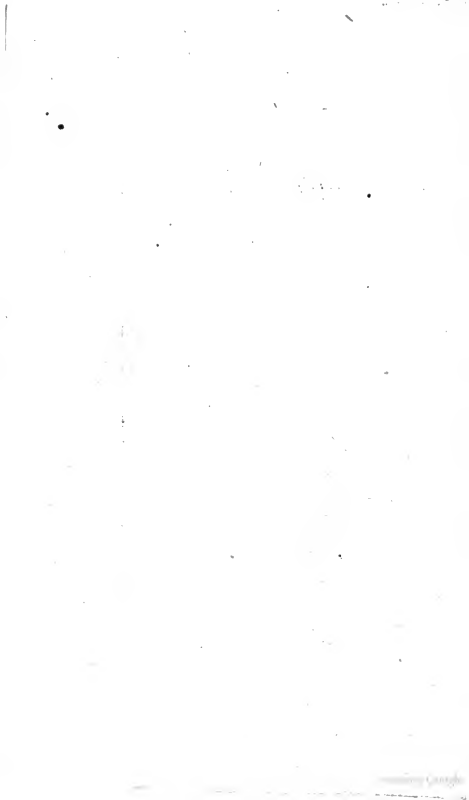
aay

Case 5.

$$-6a^2xy$$

$$-9a^2y^2$$

$$y+3abxy^2-3a^2xy-9a^2y^2$$



quotient devra être ajouté au précédent b pour former le quotient total cherché.

Pour faire cette division je prends encore un des termes de la quantité $acd - ac + abc$ qui reste à diviser, & je le divise par un de ceux du Diviseur. Je choisis a , par exemple, pour le diviser par a . Or cette division me donne c ; je multiplie donc encore ce nouveau quotient par le diviseur total $ab + ad - ac$ & je retranche le produit $abc + acd - ac^2$ du dividende restant $acd - ac^2 + abc$ & comme les deux quantités sont les mêmes & qu'il ne reste par conséquent rien à diviser, je vois par là que $b + c$ est exactement le quotient de la division de $ab^2 + abd + acd - ac^2$ par $ab + ad - ac$ & partant la valeur d' x .

XLVIII.

Après avoir fait la division précédente, on voit à peu-près comment on doit se conduire dans les autres exemples. Pour operer dans la division avec un certain ordre, on écrit ordinairement le diviseur à droite du Dividende en les séparant d'une barre verticale, ainsi que dans la division Arithmétique. Ayant choisi dans le Dividende un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, on écrit le quotient de ces deux termes sous le diviseur, & on lui donne $+$ pour signe, si les deux termes qu'on a divisé l'un par l'autre ont le même signe, on lui donne au contraire le signe $-$, si ces deux termes sont de signes différens. Cela fait on multiplie ce quotient par tous les termes du diviseur, & on écrit le produit qui en vient sous le dividende.

Méthode
générale
pour les di-
visions des
quantités
complexes.

Mais comme l'usage de ce produit doit être de le retrancher du dividende, on observe en l'écrivant sous ce dividende, de mettre à chaque terme le signe contraire de celui que donneroit la multiplication.

Ce produit étant ainsi écrit, on tire une barre & l'on fait la réduction avec le Dividende, & la quantité qui reste est à diviser de nouveau par le même diviseur. On y choisit de même un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, & on écrit le terme qui en vient pour quotient à côté du premier, en observant de lui donner le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que les deux termes qu'on aura divisés, seront de même ou de différens signes. On multiplie ensuite ce terme par tous ceux du diviseur, & on écrit le produit sous la quantité à diviser, en observant de même que la première fois de changer les signes que la multiplication donne. Tirant alors une barre & réduisant, si tous les termes ne se détruisent pas, on écrit le reste sous cette barre & on pousse l'opération de la même manière jusqu'à ce que tous les termes du dividende soient évanouis.

Maniere
d'éviter tout
tatonne-
ment dans la
division.

Dans cette operation on pourroit quelque-fois être embarrassé à choisir parmi les termes du dividende & du diviseur, ceux qui doivent servir à former les termes du quotient. Afin d'éviter tout tatonnement dans ce choix, voici ce qu'on a imaginé:

On choisit d'abord à volonté une lettre qui se trouve dans le dividende & dans le diviseur, & l'on dispose les termes de ces deux quantités

de maniere que les premiers soient ceux où cette lettre a le plus grand exposant, que le second soit celui où la même lettre a le plus grand exposant après le premier & ainsi des autres termes. Ayant donc ordonné les deux quantités proposées par rapport à la même lettre, (c'est ainsi qu'on appelle cette operation) on n'a plus aucun tâtonnement à faire pour choisir les termes qui doivent se diviser, c'est toujours les premiers du dividende & du diviseur qu'il faut prendre.

Ce que c'est
qu'ordonner
une quantité
par rapport à
une lettre.

Lorsqu'on aura formé par ces deux premiers termes du diviseur & du dividende le premier terme du quotient, & qu'on aura écrit avec des signes différens, le produit sous le dividende, s'il arrive que cette operation ait introduit des termes qui n'ayent point de semblables dans le dividende, Il faudra, en écrivant la quantité qui vient après la réduction, avoir l'attention de les placer de maniere que la quantité qui reste à diviser, reste toujours ordonnée par rapport à la même lettre que le diviseur.

XLIX.

Afin de faciliter aux commençans l'usage de cette méthode, prenons quelques exemples. Supposons d'abord qu'il s'agisse de diviser la quantité $31aabb + 2a^4 + 24b^4 - 38ab^3 - 13a^3b$ par la quantité $-3ab + 2aa + 4bb$.

Applica-
tion de la
méthode
précédente à
un exemple.

Ayant écrit ces deux quantités, comme on les voit dans la Table cy-jointe (case 1^{re}), où elles sont ordonnées par rapport à la lettre a , je divise le premier terme $2a^4$ du dividende par le premier $2aa$ du diviseur, & j'écris le

quotient aa sous le diviseur sans lui donner aucun signe, c'est-à-dire que je le fais positif à cause que les termes $2a^4$, & $2aa$ sont précédés des mêmes signes. Le quotient aa étant écrit, je le multiplie par tous les termes du diviseur, & comme cette multiplication doit me donner pour premier terme $2a^4$ produit de aa par $2aa$ avec le signe $+$, je porte ce terme sous le dividende avec le signe $-$ à cause qu'il doit être rétranché.

De même le second terme $3ba^3$ produit de aa par $3ba$ devant avoir le signe $-$ par la multiplication; j'écris sous le dividende $+3ba^3$ par la raison qu'il doit être soustrait. Enfin par ce que le troisième terme $4b^2a^2$ produit de aa par $4bb$ devrait avoir par la multiplication le signe $+$ je lui donne le signe $-$ en l'écrivant sous le dividende.

Cela fait je tire une barre & je réduis, la quantité qui reste alors est $10ba^3 + 27b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4$ qu'il faut diviser par le même diviseur $2a^2 - 3ba + 4bb$. Pour faire cette division je prens le premier terme $10ba^3$ de cette quantité à diviser, & je le divise par le premier terme $2a^2$ du diviseur, il vient $5ba$ pour quotient auquel je donne le signe $-$ à cause que les termes $10ba^3$ & $2a^2$ ne sont pas précédés des mêmes signes. Ayant écrit $-5ba$ à côté de a^2 , il s'agit de multiplier ce nouveau terme du quotient par tous ceux du diviseur, & d'en changer les signes en les écrivant sous la quantité à diviser.

Je multiplie donc d'abord $5ba$ par $2a^2$ &

comme le produit devoit être négatif à cause que le signe — de $5ba$ doit changer, suivant les règles de la multiplication, les signes du multiplicande $2a^3 - 3ba + 4b^2$ & que suivant ce que nous venons de dire les produits doivent être changés de signe lorsqu'on les écrit sous la quantité à diviser, j'écris $+ 10ba^3$ sous cette quantité. De même au lieu de donner à $15bbaa$, produit de $3ba$ par $5ba$, le signe + que l'on auroit par la multiplication je l'écris avec le signe — sous la quantité à diviser. Enfin au lieu de donner à $20b^3a$ produit de $5ba$ par $4bb$ le signe — que demanderoit la multiplication je l'écris avec le signe + sous la quantité à diviser. Je tire alors une barre & je réduis, ce qui me donne $12b^2a^2 - 18b^3a + 24b^4$ quantité encore à diviser par $2a^2 - 3ba + 4bb$.

Pour faire cette nouvelle division, je divise le terme $12b^2a^2$ par $2a^2$ & j'ai, pour troisième terme du quotient, $6bb$ que j'écris à côté des deux premiers en lui donnant le signe + à cause que $12b^2a^2$ & $2aa$ ont le même signe.

Multipliant présentement $6b^2$ par $2a^2$ j'ai $12b^2a^2$ auquel je donne le signe — en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe +. De même multipliant $6b^2$ par $3ba$ j'ai $18b^3a$ auquel je donne le signe + en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe —. Enfin multipliant $6bb$ par $4b^2$ j'ai $24b^4$ auquel je donne le signe — contraire à celui que donneroit la multiplication. Réduisant alors je vois que tous

les termes se détruisent. Donc la division est exacte. Donc le quotient cherché est $a a - 5 b a + 6 b b$.

L.

Autre
exemple.

Qu'on se propose maintenant de diviser $6 b^3 c$ par $b^4 - 9 c c b b + 4 c^4$ par $3 c b + b b + 2 c c$. J'écris ces deux quantités sous la forme qu'on voit dans la seconde case de la Table suivante, en les ordonnant par rapport à la lettre c .

Divisant alors les deux premiers termes j'ai $2 c c$ pour le premier terme du quotient lequel étant multiplié par le diviseur donne, en changeant les signes, la quantité $-4 c^4 + 6 b c^3 - 2 b b c c$ qui étant placée sous le dividende, donne pour reste $6 b c^3 - 11 b b c c + 6 b^3 c - b^4$ dans laquelle j'ai observé que le terme $b c^3$ affecté de c^3 introduit par la multiplication, fut placé le premier afin que la quantité restât ordonnée par rapport à c . Divisant alors ce premier terme $6 b c^3$ par $2 c c$ j'ai $3 b c$ pour quotient avec le signe $+$. Je multiplie de même ce nouveau terme du quotient par le diviseur, & je porte les termes qui en viennent sous le dividende en changeant leurs signes. Faisant la réduction ensuite, Je n'ai plus que $-2 b b c c + 3 b^3 c - b^4$ à diviser, le premier terme de cette quantité étant divisé par celui du diviseur, donne pour troisième terme du quotient b^2 affecté du signe $-$ à cause que les termes $2 b^2 c^2$ & $2 c^2$ sont de différens signes, & comme le produit de ce troisième terme par le diviseur détruit tous ceux de la quantité à diviser, je conclus

que la division est exacte & que $2cc + 3bc - b^2$ est le quotient demandé.

L I.

Lorsqu'on veut ordonner le dividende & le diviseur par rapport à une même lettre, si on trouvoit plusieurs termes où cette lettre, fut élevée à la même puissance, on tomberoit encore dans l'inconvenient du tatonnement, à moins qu'on n'ordonnat encore ces termes par rapport à une autre lettre commune aux deux quantités.

Attention qu'il faut avoir en ordonnant lorsqu'il y a plusieurs lettres.

Supposons par exemple que le dividende étant ordonné par rapport à la lettre d on eut de suite $3acc d^3 - c^3 d^3 - 3aac d^3 + a^3 d^3$ pour les premiers termes du dividende, & que dans le diviseur on eut de même $aad^2 + ccd - 2acd$ pour les premiers termes, en arrangeant ainsi ces deux quantités $a^3 d^3 - 3caad^3 + 3ccad^3 - c^3 d^3$; $a^3 d^2 - 2cad^2 + ccd^2$ c'est-à-dire en les ordonnant par rapport à la lettre a , il n'y auroit aucun tatonnement à craindre en faisant la division, pourvu qu'on observât, à chaque fois qu'on voudroit trouver un terme du quotient, que la quantité à diviser fut toujours ordonnée de la même manière. Pour exercer les commençans à ces attentions dans la division, j'ai joint encore quelques exemples dans la Table suivante.

L I I.

Dans la solution des Problèmes précédens nous n'avons eu besoin que d'une seule inconnue, parce qu'il n'y avoit à proprement parler dans ces Problèmes qu'une quantité à trou-

ver. Mais comme en avançant dans la science de l'Algebre , on trouve des Problèmes où l'on est obligé d'employer plusieurs inconnues, nous allons voir comment on les traite.

Problème
dans lequel
on employe
deux incon-
nues.

Etant données les pèsanteurs spécifiques de deux matieres qui entrent dans un mixte , le volume & le poids total du mixte , trouver ce qu'il entre de chacune de ces deux matieres dans le mixte.

Que le nombre de pouces cubes contenus dans ce mixte , ou en général son volume de quelque maniere qu'il soit mesuré soit exprimé par *a.*

Que son poids total soit exprimé par *b.*

Que la quantité de la premiere matiere contenue dans le mixte, par exemple ce qu'il y a de pouces cubes de cette matiere , soit exprimé par *x.*

Que le poids d'un pouce cube de cette matiere ou en général sa pèsanteur spécifique soit *c.*

La quantité de la seconde matiere *y.*

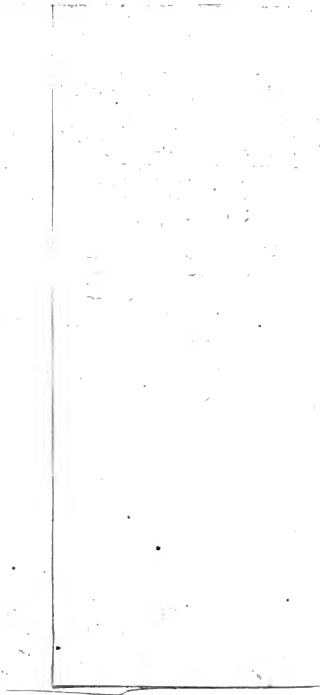
Sa pèsanteur spécifique *d.*

On aura pour le poids de la quantité de la premiere matiere qui entre dans le mixte . . *c x*

Car si *x* exprime le nombre de pouces cubes de cette matiere , & *c* le poids de chaque pouce cube , leur poids total sera le produit de ces deux nombres. On aura de même pour le poids de la quantité de la seconde matiere.. *d y.*

Or comme ces deux poids doivent étant ajoutés faire le poids total du mixte , on a donc l'Equation

$$c x + d y = b$$



P
dans
on c
deux
nues

mais cette Equation ne sçauroit suffire pour résoudre le Problème, car si on veut en dégager l'une des inconnues, x , par exemple, on trouve

$$x = \frac{b - dy}{c}$$

qui ne peut apprendre à connoître x qu'en supposant qu'on connoisse y . Il faut donc encore quelqu'autre opération pour connoître y . Pour y parvenir, il faut voir si on a fait attention à tout ce qu'on demandoit dans l'énoncé de la question, ou, pour parler comme les Algebristes, si on a rempli toutes les conditions du Problème; pour peu qu'on y réfléchisse, on verra qu'on n'a exprimé qu'une des deux conditions, celle que le poids total du mixte soit b , & qu'on n'a pas employé celle qui nous apprend que la quantité de la première matière ajoutée avec la quantité de la seconde doit faire le volume total. On aura donc par cette seconde condition l'Equation

$$x + y = a$$

qui, ainsi que la première, ne nous apprend la valeur de x , qu'au moyen de celle de y , en nous donnant $x = a - y$.

Mais si on ne peut pas par aucune de ces deux Equations prises séparément trouver x indépendamment de y , on trouve bien tôt en se servant à la fois de l'une & de l'autre, le moyen d'avoir y entièrement connu. Car puisque chacune de ces deux Equations donne une valeur de x , on peut égaler ces deux valeurs, ce qui donne l'Equation.

$$\frac{b-dy}{c} = a-y$$

de laquelle on tire par les méthodes précédentes $b-dy = ac-cy$ ou $ac-b = cy-dy$, ou enfin $y = \frac{ac-b}{c-d}$.

y étant connu on voit bien que x qui est également $a-y$ ou $\frac{b-dy}{a-c}$ est connu aussi. On n'a donc qu'à mettre dans celle qu'on voudra de ces deux quantités, dans la première $a-y$ par exemple, à la place de y , $\frac{ac-b}{a-c}$, & l'on aura $a - \frac{ac-b}{a-c}$ pour la valeur de x .

En examinant la valeur précédente $a - \frac{ac-b}{a-c}$ on découvre bien-tôt qu'on peut la réduire, car si on veut mettre a au même dénominateur que la fraction $\frac{ac-b}{a-c}$, il faut le multiplier par $c-d$, ce qui donne $\frac{ac-ad}{c-d}$ au lieu de a , ainsi il ne s'agit plus que de retrancher de cette fraction la seconde $\frac{ac-b}{c-a}$, retranchant pour cela leurs numérateurs, & divisant le reste par le dénominateur commun, on aura $\frac{ac-ad-ac+b}{c-d}$ ou $\frac{b-ad}{c-d}$ pour la valeur réduite de x .

Les quantités demandées, tant de la première que de la seconde matière qui entrent dans le mixte, sont donc exprimées l'une par $\frac{ac-b}{c-a}$ & l'autre par $\frac{b-ad}{c-d}$, ainsi le Problème est résolu.

LIII.

Si au lieu de substituer la valeur $\frac{ac-b}{c-d}$ de y dans $a-y$, on l'avoit substituée dans $\frac{b-dy}{c}$ qui est également la valeur de x on au-

roit eu $\frac{b-d \times \frac{ac-b}{c-d}}{c}$ qui d'abord ne paroît gue-

res être la même valeur que $\frac{b-ad}{c-d}$. Mais comme on sçait que les valeurs $a-y$ & $\frac{b-dy}{c}$ de x sont égales, & que ce n'est même que parce qu'elles le sont qu'on a déterminé la valeur de y , on doit être sûr qu'en examinant ces deux dernières valeurs de x exprimées en quantités connues, on trouvera leur identité. Voici comment, on peut parvenir à réduire l'une à l'autre.

On donnera d'abord le denominateur $c-d$ à la lettre b , ce qui se fera en la multipliant par $c-d$, c'est-à-dire en mettant $\frac{bc-bd}{c-d}$ au lieu de b , & alors la quantité précédente $b - \frac{d \times ac - b}{c-d}$ se changera en $\frac{bc-bd-d \times ac-b}{c-d}$

ou $\frac{bc-bd-d \times ac-b}{cc-dc}$, mais au lieu $d \times ac-b$ on peut écrire $acd-bd$, & comme cette quantité doit être retranchée de $bc-bd$, la quantité précédente $\frac{bc-bd-d \times ac-b}{cc-dc}$ deviendra donc en réduisant, $\frac{bc-dca}{c^2-dc}$ qui en divisant le numérateur & le dénominateur par la même quan-

tité c , devient enfin $\frac{b-d}{c-d}$ même valeur que cy-dessus.

LIV.

Application
de la solu-
tion précé-
dente à un
exemple.

Pour faire présentement une application de la solution générale qu'on vient de trouver, supposons que le mixte soit composé d'or & d'argent, * que son poids total soit de 30 onces, son volume de 3 pouces cubes, le poids du pouce cube d'or de $12\frac{2}{3}$ onces, celui du pouce cube d'argent de $6\frac{8}{9}$ onces

on aura $a = 3$, $b = 30$, $c = 12\frac{2}{3}$, $d = 6\frac{8}{9}$ substituant donc ces valeurs dans les deux formules générales $x = \frac{b-d}{c-d}$ & $y = \frac{a-c}{c-d}$

elles deviendront $x = \frac{21}{13}$ & $y = \frac{18}{13}$ c'est-à-dire que le mixte contiendra $\frac{21}{13}$ pouces cubes d'or & $\frac{18}{13}$ pouces cubes d'argent.

LV.

On découvre aisément par ce qu'on a vû dans le Problème précédent, que toutes les fois qu'on aura employé deux inconnues dans une question, il faudra deux Equations pour les dégager; & que lorsqu'on demande deux quantités dans un Problème, il faut aussi qu'on donne deux conditions pour les déterminer, afin qu'on

* Le Problème qu'Archimede eut à résoudre, lorsqu'on lui proposa de déterminer la quantité d'argent qui étoit allié avec l'or dans la Couronne du Rbi Hieron, ne pouvoit pas être autre chose que celui qu'on vient de voir aussi-tôt qu'il eut déterminé la pesanteur spécifique du metal de cette Couronne, ce qu'il fit en examinant de combien elle perdoit de son poids en la pesant dans l'eau.

puisse

puisse tirer de ces deux conditions les deux équations nécessaires. Pour montrer à employer ces conditions nous donnerons encore le Problème suivant.

LVI.

Deux sources qui coulent chacune uniformement, ont rempli ensemble un réservoir a, l'une en coulant pendant un tems b, l'autre pendant un tems c; les deux même sources ont rempli un autre réservoir d; la première coulant pendant le tems e, la seconde pendant le tems f: on demande la dépense de chacune de ces sources.

Autre Problème où l'on emploie deux inconnues.

Soient x & y ces dépenses, c'est-à-dire, par exemple, ce que chacune de ces deux sources fourniroit de muids d'eau par jour en supposant que les réservoirs a & d fussent mesurés en muids pendant que les tems b, c, e, f , seroient comptés en jours.

On aura bx pour la quantité d'eau fournie par la première source pendant le tems b ; & de même cy pour la quantité d'eau fournie par la seconde source dans le tems c . Mais ces deux quantités d'eau par la première condition du Problème doivent être égales au réservoir a , on a donc l'Equation

$$bx + cy = a$$

On aura de même ex , fy pour les quantités d'eau fournies par les mêmes sources pendant les tems e, f , & par conséquent la seconde condition donnera

$$ex + fy = d$$

Il ne s'agit plus maintenant que de tirer de ces deux Equations les valeurs de x & de y .

ce qui se fera , ainsi que dans le Problème précédent , en tirant une valeur de x en y de chacune de ces deux Equations & en les égalant ensuite. La premiere sera $\frac{a-cy}{b}$ la seconde $\frac{d-fy}{e}$ égalant donc ces deux valeurs on aura $\frac{a-cy}{b} = \frac{d-fy}{e}$ ou $ae-cy=bd-bfy$, ou $ae-bd=cy-bfy$ ou enfin

$$y = \frac{ae-bd}{ce-bf}.$$

Substituant cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de x , dans $\frac{a-cy}{b}$ par

$$a-c \times \frac{ae-bd}{ce-bf}$$

exemple, il viendra $x = \frac{a-c \times \frac{ae-bd}{ce-bf}}{b}$ ou

$$x = \frac{a \times ce - bf - c \times ae + bd}{b \times ce - bf}$$

en mettant le premier terme a au même dénominateur que le second, & en multipliant les deux dénominateurs l'un par l'autre.

Faisant ensuite les multiplications indiquées dans cette valeur & réduisant on aura

$$x = \frac{cd-af}{ce-bf}.$$

Il n'est donc plus question maintenant que d'avoir les valeurs particulieres de a, b, c, d, e, f , pour les substituer dans ces deux valeurs générales de x & de y , afin d'en tirer, telle solution particuliere qu'on voudra.

Au lieu de commencer par dégager x dans les deux Equations précédentes, & d'égaliser les deux valeurs qu'elles donnent, afin d'avoir y il est clair qu'on pouvoit également commen-

D' A L G È B R E. 67

cer par dégager y en égalant ensuite les deux différentes valeurs pour en tirer x , & que par cette opération on seroit parvenu nécessairement au même résultat.

L V I I.

Pour faire présentement quelque application de ce Problème, supposons que la premiere source ayant coulé deux jours & la seconde trois, elles aient rempli un reservoir de 195 muids. Ensuite que la premiere source ayant coulé cinq jours, & la seconde quatre, elles aient rempli un reservoir de 330 muids.

Exemple
du Problème
précédent
en nombres.

On aura donc $a = 195$, $b = 2$, $c = 3$
 $d = 330$, $e = 5$, $f = 4$ & par conséquent
 $ac - af = 210$, $ce - bf = 7$, $ae - db = 315$
d' où $x = \frac{d \cdot e - cf}{ce - bf} = \frac{210}{7} = 30$

$$\& y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = \frac{315}{7} = 45$$

ainsi la premiere source dans cet exemple four-
nit 30 muids par jour & la seconde 45.

L V I I I.

Supposons présentement que la premiere source ayant coulé pendant 4 jours & la seconde pendant 6 jours, elles aient rempli un reservoir de 120 muids. Ensuite que la premiere ayant coulé 3 jours & la seconde 7, elles aient rempli un reservoir de 190 muids.

Autre
exemple.

On aura dans ce cas $a = 120$, $b = 4$, $c = 6$
 $d = 190$, $e = 3$, $f = 7$ & par conséquent $d \cdot e$
 $- f = 300$, $ce - bf = 10$, $ae - bd = 400$

ce qui donnera $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{100}{-10}$

$$\& y = \frac{ac - db}{ce - bf} = \frac{-400}{-10}$$

Singularité
des expres-
sions où l'on
arrive dans
cet exemple.

La premiere fois qu'on aura trouvé de semblables valeurs, c'est-à-dire des quantités négatives divisées par des quantités négatives, & des positives divisées par des négatives, on aura dû être embarrassé à sçavoir ce qu'elles devoient signifier, & ceux qui auront craint de faire de mauvais argumens methaphysiques, auront cherché à reprendre la question un peu plus haut, afin d'éviter ces sortes de divisions; Voici, par exemple, ce qu'on aura pû faire pour cela dans cette question cy.

Maniere de
reconnoître
ce qu'elles
peuvent
signifier.

On aura repris les deux Equations générales $bx + cy = a$, & $ex + fy = d$, & substituant dans ces équations pour a, b, c, d, e, f , les valeurs que ces lettres ont dans cet exemple on aura eu $4x + 6y = 120$ & $3x + 7y = 190$. Tirant de ces Equations $x = 30 - \frac{1}{2}y$ & $x = \frac{190}{3} - \frac{1}{3}y$, on aura égalé ces deux valeurs, ce qui aura donné $30 - \frac{1}{2}y = \frac{190}{3} - \frac{1}{3}y$ — $\frac{7}{2}y$ ou $\frac{7}{3}y - \frac{1}{2}y = \frac{190}{3} - 30$ ou $y = 40$.

Substituant ensuite cette valeur de y dans $30 - \frac{1}{2}y$ valeur de x , on aura eu $x = 30 - 60$, c'est-à-dire $x = -30$. Par cette voye on aura vû, sans en pouvoir douter, que le quotient de -400 par -10 est $+40$, & que celui de $+300$ par -10 est -30 .

LIX.

Théoreme:
généraux

On aura bien-tôt après regardé comme des

principes généraux que

le $+$ divisé par le $+$ donnoit le $+$

le $+$ divisé par le $-$ donnoit le $-$

le $-$ divisé par le $+$ donnoit le $-$

le $-$ divisé par le $-$ donnoit le $+$

& de même pour la multiplication.

concernant
les signes des
quotients ou
des produits.

Ces principes auront été d'autant plus faciles à imaginer qu'on y étoit comme conduit, par les reflexions qu'on avoit dû faire sur les signes qu'on trouvoit aux termes des produits & des quotients, en pratiquant les préceptes donnés pour la multiplication & pour la division des quantités complexes.

Mais s'il est facile qu'on se doute pour ainsi dire des ces principes, on sent bien aussi qu'on ne sçauroit les affirmer qu'après y avoir fait beaucoup de reflexions, & il y a apparence que les premiers Analystes n'en auront été surs qu'après les avoir vérifiés dans beaucoup d'exemples.

L X.

Pour nous assurer que la multiplication de $-$ par $-$ doit toujours donner $+$ au produit, voyons quelle lumière nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications donnée Art. XLV. Suivant cette méthode on voit très-clairement que le produit d'une quantité telle que $a - b$ par une autre $c - d$ doit être $ac - bc - ad + bd$, & on voit par conséquent en même tems que le terme bd qui est venu par la multiplication de b & de d a le signe $+$, tandis que ses produisans b & d ont le signe $-$. Il ne reste donc plus qu'à sçavoir si lorsque deux quantités négatives telles que $-b$ & $-d$ ne se-

On démon-
tre que $-b$
par $-d$ est
 $+bd$; quoi-
que ces quan-
tités ne
soient précé-
dées de rien.

ront précédées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore $+bd$. Or c'est ce dont il est facile de reconnoître la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a-b$ par $c-d$ étoit $ac-bc-ad+bd$ ne spécifiant aucune grandeur particulière ni à a ni à b , doit avoir enoëtre lieu lorsque ces quantités sont égales à zero; or en ce cas le produit $ac-bc-ad+bd$ se réduit à $+bd$, donc $-b \times -d = +bd$.

L X I.

Les autres cas se démontrent de même.

Quant aux autres cas, c'est-à-dire à la multiplication & à la division de $+$ par $-$ on les justifieroit de la même maniere.

L X I I.

Comment la valeur négative qu'on a trouvée résout le Problème.

Pour revenir présentement à notre dernière application du Problème précédent, remarquons qu'après avoir trouvé que $x = -30$ & $y = +40$, on a dû avoir encore une autre espece d'embarras, c'étoit de sçavoir ce que signifioit cette valeur de x , pour le découvrir sûrement, le chemin qu'il est vraisemblable qu'on aura tenu, c'est de remonter aux conditions du Problème ou, ce qui revient au même, aux Equations $4x + 6y = 120$ & $3x + 7y = 190$ qui les expriment alors, & de voir comment les valeurs -30 & $+40$ de x & de y conviennent à ces Equations. On trouve premièrement que $4x$ doit être en ce cas -120 & que $6y$ est 240 , d'où par conséquent $4x + 6y$ est $-120 + 240$ qui est en effet égal à 120 . On trouve de même que $3x + 7y$ est $-90 + 280$ qui se réduit à 190 .

Voyant donc comment les valeurs -30 & $+40$ de x & de y , satisfont aux Equations $4x + 6y = 120$ & $3x + 7y = 190$, on découvre en même-tems comment elles satisfont aux conditions du Problème; car puisque l'usage que l'on fait des quantités $4x$ & $3x$ qui expriment alors les quantités d'eau dépensées par la premiere source, dans la premiere & dans la seconde opération, est de les retrancher de $6y$ & de $7y$ qui expriment les quantités d'eau fournies dans les mêmes opérations par la seconde source, il faut que dans ce cas, on regarde la premiere source comme dérobant de l'eau aux reservoirs, au lieu d'en fournir comme elle faisoit dans l'autre exemple, & comme on l'avoit supposé en exprimant les conditions du Problème.

L'on voit en cette occasion un exemple de la généralité de l'Analyse qui fait trouver dans une question des cas que l'on n'avoit pas prévu d'abord pouvoir y être renfermés.

LXIII.

Dans presque toutes les questions résolues généralement, on a trouvé des cas de même nature que le précédent, & l'on en a toujours conclu, que lorsque la valeur de l'inconnue devenoit négative; la quantité qu'elle exprimoit devoit être prise dans un sens contraire à celui suivant lequel on l'avoit employée en exprimant les conditions du Problème.

Les inconnues devenant négatives, doivent être prises dans un sens différent de celui de l'énoncé du Problème.

Ce qu'on vient de dire des inconnues, se doit dire aussi des connues, c'est-à-dire que dans

Il en est de
même des
connues.

les applications qu'on fera d'une solution générale, si on fait négatives quelques-unes des quantités données $a, b, \&c.$ dans les Problèmes, cela signifiera que dans l'application particulière, ces quantités doivent être prises dans un sens contraire à celui suivant lequel on les prenoit dans la solution générale.

L X I V.

Exemple de
l'usage des
quantités
connues fai-
tes négati-
ves.

Qu'on se propose, par exemple, de trouver quelles doivent être dans le Problème précédent les dépenses des deux sources, pour que la seconde fournissant de l'eau pendant 6 jours tandis que la première en dérobe pendant 3 jours, un réservoir de 180 muids soit rempli; & que la première source ensuite fournissant de l'eau pendant 3 jours & la seconde pendant 4 jours, un réservoir de 320 muids soit rempli.

On n'aura qu'à faire dans la solution générale $a=180, b=-3, c=6, d=320, e=3, f=4$.

Et l'on aura $dc=1920, af=720, ce=18, bf=-12, ae=540, db=-960$, & par conséquent $dc-af=1200, ce-bf=30, ae-db=1500$, qui donnent $x=\frac{dc-af}{ce-bf}=40$ & $y=\frac{ae-db}{ce-bf}=50$, par lesquelles on apprend que la dépense de la première source est de 40 muids par jour, soit pour dérober comme elle fait dans la première opération, soit pour fournir ainsi qu'il lui arrive dans la seconde; & que la dépense de la seconde est de 50 muids par jour qu'elle

fournit dans chacune des deux opérations. Il étoit si naturel d'imaginer que b devoit être négatif dans cette application, & si aisé de s'en assurer en remontant à l'usage qu'on fait de cette lettre en exprimant les conditions du Problème, qu'il est inutile de s'arrêter à le faire voir.

L X V.

Pour faciliter aux Commençans la manière d'étendre les solutions des Problèmes aux cas où les quantités données sont prises dans un sens contraire à celui où elles avoient été prises d'abord, nous prendrons encore un exemple dans un autre Problème que le précédent, nous reprendrons le Problème de l'art. xxiv. où il s'agit de trouver la rencontre de deux Courriers, & nous chercherons à tirer de la solution générale celle du cas suivant.

Deux Courriers sont à la distance de 50 lieues, l'un étant par exemple à Lille, l'autre à Paris. Le premier part de Lille à 8 heures du soir pour aller à Paris en faisant 4 lieues par heure. Le second part le même jour de Paris à 11 heures du matin pour aller à Lille, & fait 3 lieues par heure, on demande à quelle distance de Paris ils se rencontreront.

Autre exemple du même usage des quantités connues faites négatives.

En comparant cet énoncé avec celui du Problème général, on voit d'abord que la lettre c qui exprimoit la marche du premier Courrier dans un tems donné doit être négative, puisque dans la solution générale, on supposoit que le premier Courrier s'éloignoit, & qu'il vient dans ce cas-ci au-devant du second. On voit ensuite que la lettre b qui exprimoit le nombre

d'heures d'avance du premier Courrier doit être aussi négative, puisqu'il est parti plus tard.

Ainsi on n'aura qu'à faire dans la formule générale $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$, $a = 50$, $b = -9$

$c = -4$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 1$, & l'on aura

$$x = \frac{50 \times 1 \times 3 - 9 \times -4 \times 3}{1 \times 3 + 4 \times 1} = \frac{150 + 108}{3 + 4}$$

$$= \frac{258}{7} = 36 \frac{6}{7} \text{ qui apprend que lorsque le}$$

Courrier de Paris aura fait $36 \frac{6}{7}$ lieues il aura joint celui de Lille.

L X V I.

Un des usages des plus étendus de l'Algebre & qui montre le mieux l'avantage qu'on a de prendre à volonté, ainsi qu'on vient de faire, les signes des quantités données en général dans les Problèmes, c'est de rapporter à la solution des Equations qu'on a prises généralement, toutes celles dans lesquelles les inconnues sont disposées de la même maniere, mais avec des signes & des coefficients quelconques. Par exemple avec les deux Equations $bx + cy = a$ & $ex + fy = d$ qu'on a résolues dans l'art. LVI. on résoudra toujours deux Equations du premier degré quelles qu'elles soient, pourvu qu'elles ne renferment que deux inconnues.

Deux Equations du premier degré à deux inconnues, peuvent toujours être rapportées aux précédentes.

Qu'on ait, par exemple, à résoudre les deux Equations $mnx = ppy - hbg$ & $mny = p^3 - nnx$. Pour les comparer aux premières, on commencera par les écrire ainsi

$mnx - p^3y = -hbg$ & $nnx + nmy = p^3$ les comparant alors terme à terme avec les deux Equations

Exemple.

$$bx + cy = a \text{ \& } ex + fy = d.$$

La première avec la première, & la seconde avec la seconde, on aura

$$b = mn, c = -p^2, a = -bhg, e = n^2, f = mn, d = p^3.$$

$$\text{Ce qui donnera } cd = -p^4, af = -mnhhg, ce = -p^2n^2, bf = mmnn, ae = -h^2n^2g, bd = mnp^3,$$

$$\text{\& par conséquent } cd - af = -p^4 + mnhhg, ce - bf = -m^2n^2 - p^2n^2; ae - bd = -h^2n^2g - mnp^3.$$

Or substituant ces valeurs dans les formules générales $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$ & $y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$, on aura

$$\text{enfin } x = \frac{p^4 - mnh^2g}{m^2n^2 + p^2n^2} \dots \dots \dots \text{ \& } y = \frac{h^2gn^2 + mnp^3}{m^2n^2 + p^2n^2}.$$

LXVII.

Supposons présentement qu'on ait les Equations Autre exemple.

$$\frac{3mpx}{p-q} = \frac{pp}{p+q} - \frac{2nq}{p-q} \text{ \& } mx + \frac{p+q}{p-q}y = \frac{qn}{p-q}.$$

en mettant la première sous cette forme

$$\frac{3mpx}{p-q} - \frac{pp}{p+q}y = -\frac{2nq}{p-q}$$

comparant à l'Equation générale $bx + cy = a$,

$$b = \frac{3mp}{p-q}, c = -\frac{pp}{p+q}, a = -\frac{2nq}{p-q}, \text{ \& en comparant la seconde à l'Equation } ex + fy = d$$

$$\text{on aura } e = m, f = \frac{p+q}{p-q}, d = \frac{qn}{p-q} \text{ \& ces valeurs étant substituées dans la formule }$$

$$x = \frac{cd - af}{ce - bf} \text{ donneront } \dots \dots \dots *$$

$$x = \frac{\frac{pp}{p+q} \times \frac{qn}{p-q} + \frac{2nq}{p-q} \times p+q}{\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times p+q}$$

Pour réduire cette quantité, je commence par multiplier le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2nq \times p+q}{p-q}$ par $p+q$ ce qui la change en

$$\frac{2nq \times p+q}{p-q \times p+q}, \text{ par ce moyen le numérateur entier}$$

$$\text{de la valeur de } x \text{ devient } \frac{pp \times qn + 2nq \times p+q}{p-q \times p+q}$$

$$\text{ou } \frac{qn \times 2 \times p+q - pp}{p-q \times p+q} \text{ ou } qn \times \frac{pp+4pq+1qq}{p-q \times p+q}$$

Je travaille ensuite sur le dénominateur de la valeur de x , en mettant les deux parties au même dénominateur, ce qui donne

$$\frac{-p^2 \times p - q \times m - 3mp \times p+q}{p+q \times p-q} \text{ ou } \frac{-mp \times pp - pq + 3 \times p+q}{p+q \times p-q}$$

ou enfin $\frac{mp \times 4pp + 5pq + 3qq}{p+q \times p-q}$. Ces deux opérations changent la valeur précédente de x

$$\text{en } \frac{qn \times \frac{pp+4pq+1qq}{p+q \times p-q}}{\frac{4pp+1pq+3qq}{p+q \times p-q}}, \text{ mais comme le nu-}$$

merateur & le dénominateur de cette fraction sont chacun divisés par $p+q \times p-q$, j'ôte ce diviseur, & la valeur de x devient

$$\frac{qn \times pp + 4pq + 2qq}{-mp \times 4pp + 5pq + 3qq} \text{ ou } -\frac{qn \times pp + 4pq + 2qq}{mp \times 4pp + 5pq + 3qq}$$

$$\text{ou } -\frac{qn}{mp} \times \frac{pp + 4pq + 2qq}{4pp + 5pq + 3qq} \text{ ou enfin } \dots\dots$$

$$x = \frac{-nqp^2 - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpqq}$$

substituant maintenant les mêmes valeurs de a, b, c , &c. dans la formule générale $\dots\dots\dots y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$

$$\text{on aura } y = \frac{-\frac{2nq}{p-q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \frac{qn}{p-q}}{-\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \frac{p+q}{p+q}}$$

au numérateur de laquelle je donne cette forme

$$\frac{-2mnq \times p - q - 3mpqn}{p-q}, \text{ en multipliant le}$$

numérateur & le dénominateur de la fraction

$-\frac{2nqm}{p-q}$ par $p - q$. Je réduis ensuite cette nouvelle forme, & elle devient $\frac{mnq \times -5p + 2q}{p-q}$

Quant au dénominateur de la valeur de y , comme il est le même que celui de la valeur de x , il se réduira de même, & l'on aura

$$\text{partant } y = \frac{mnq \times \frac{2q - 5p}{p-q}}{-mp \times \frac{4pp + 5pq + 3qq}{p+q}}$$

ou en effaçant les diviseurs communs $p - q$ & en ré-

$$\text{duisant, } y = \frac{qn \times \frac{5p - 2q}{p-q}}{p \times \frac{4pp + 5pq + 3qq}{p+q}} \text{ qui en fai-}$$

sans passer le diviseur $p + q$ en haut, & le diviseur $p - q$ en bas suivant les regles des divisions des fractions, devient enfin

$$y = \frac{qn \times p + q \times \{p - 2q\}}{p \times p - q \times 4p^2 + \{pq + 3qq\} - 2qn + \{p^2 - qn + 3pq^2n\}}$$

$$\text{ou } y = \frac{-2p^2q^2 + 4p^4 + p^3q - 3pq^3}{-2p^2q^2 + 4p^4 + p^3q - 3pq^3}$$

LXVIII.

Autre maniere de résoudre le même exemple.

Si pour résoudre les Equations proposées dans cet exemple, on avoit commencé par delivrer de fractions ces Equations le calcul qu'on auroit fait de la maniere suivante auroit donné moins d'embarras de la part des diviseurs.

Soient multipliés d'abord les deux membres de l'Equation $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2qn}{p-q}$ ou $\frac{3m p x}{p-q} - \frac{ppy}{p+q} = -\frac{2qn}{p-q}$ par $pp - qq$ produit des deux diviseurs $p-q$, $p+q$ & l'on aura l'Equation $3mpp + 3mpq \times x + ppq - p^3 \times y = -2npq - 2nqq$.

Soient multipliés de même les deux membres de l'Equation $mx + \frac{p+q}{p-q} \times y = \frac{nq}{p-q}$ par $p - q$ & l'on aura $mp - mq \times x + pp - qq \times y = qn$

Comparant présentement ces deux nouvelles Equations avec les deux formules générales on a $b = 3mpp + 3mpq$, $c = ppq - p^3$, $a = -2npq - 2nq^2$, $e = mp - mq$, $f = p^2 - q^2$, $d = qn$

D'où l'on tire $cd = p^2q^2n - p^3qn$, $af = -$

$$\begin{aligned} 2np^3q - 2np^2q^2 + 2pq^3n + 2nq^4, & ac = 2nmq^3 \\ - 2nmp^2q, & bd = 3mnp^2q + 3mnpq^2; ce = \\ 2p^3qm - mp^4 - mp^2q^2; & bf = 3mp^3q + 3mp^4 \\ - 3mpq^3 - 3mp^2q^2 & \\ \& partant cd - af = qnp^3 + 3p^2q^2n - 2npq^3 - 2nq^4 \\ ce - bf = 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3 \\ ac - bd = 2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpq^2 & \text{ qui} \end{aligned}$$

$$\text{donnent } x = \frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$$

$$\& y = \frac{2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpq^2}{2mnpq^2 - 4mp^4 - mpq + 3mpq^3}$$

LXIX.

Si on compare présentement ces deux valeurs de x & de y avec celles qu'on avoit trouvées précédemment, on voit d'abord sans aucune difficulté l'idendité des deux valeurs de y . Quant aux valeurs de x , pour sçavoir comment la première peut être la même chose que la seconde, il faut remarquer que l'égalité qui doit être entre ces deux expressions, suppose nécessairement que le numérateur $qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4$ de la seconde contienne le numérateur $-qnp^3 - 4pq^2n - 2q^3n$ de la première, de la même manière que le dénominateur $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$ de la seconde contient le dénominateur $4p^3m + 5p^2qm + 3mpq^2$ de la première. Or en prenant la peine de diviser le second numérateur par le premier, on trouve en effet le même quotient $p - q$ qu'en divisant le second dénominateur par le premier. C'est-à-dire que l'expression

Comparaison
des deux so-
lutions pré-
cédentes.

$\frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^2 - nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^2q - mp^2q + 3mpq^2}$ se change en

$\frac{p - q \times \frac{-nqpp - 3pqqn - nq^3}{p - q \times 4mp^2 + 3mp^2q + 3mpq^2}}{p - q \times 4mp^2 + 3mp^2q + 3mpq^2}$ ou en

$\frac{-nqpp - 3pqqn - 2nq^3}{4mp^2 + 3mp^2q + 3mpq^2}$ en ôtant les diviseurs communs $p - q$.

L X X.

La maniere dont on vient de réduire la plus composée des deux valeurs de x à la plus simple étoit aisée à imaginer lorsqu'on sçavoit l'une & l'autre de ces deux expressions, mais si on n'eût connu que la plus composée & qu'on eût voulu la simplifier, on auroit été beaucoup plus embarrassé, puisqu'on n'auroit pas sçu par quelle quantité il falloit diviser le numérateur & le dénominateur de la fraction. Or, comme ce seroit un vice dans la solution d'un Problème qu'une valeur d' x réductible & non réduite, il faut chercher une méthode pour réduire toute fraction qui peut se réduire, ou ce qui revient au même, il faut chercher une méthode pour trouver quel est le plus grand diviseur commun que puissent avoir deux quantités données.

Supposons d'abord, pour aller du plus simple au plus composé que ces deux quantités ne soient que des nombres; que l'on ait, par exemple, à chercher le plus grand diviseur commun des nombres 637 & 143 ou, ce qui revient au même, que l'on se propose de réduire la fraction $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Divisant

Divisant d'abord 637 par 143 il vient 4 pour quotient & 65 pour reste, c'est-à-dire, que la fraction $\frac{637}{143}$ se change en $4 + \frac{65}{143}$, d'où la question est réduite à abaisser la fraction $\frac{65}{143}$, ou ce qui revient au même, à chercher le nombre qui est le plus grand commun diviseur des nombres 143 & 65. Car lorsque ce nombre sera trouvé, il est évident qu'il sera aussi le plus grand commun diviseur des nombres 637 & 143, puisqu'on ne sauroit réduire la fraction $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression, qu'on ne réduise en même-tems $4 + \frac{65}{143}$ ou $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Les deux nombres 143 & 65 sur lesquels il s'agit d'opérer présentement étant plus simples que les deux premiers 637 & 143, je vois que la difficulté est diminuée, & qu'en s'y prenant de la même manière on la diminuera encore. Au lieu de la fraction $\frac{65}{143}$ à réduire, j'écris $\frac{143}{65}$ non que je prétende que ces fractions soient les mêmes, mais parce qu'on ne sauroit réduire l'une, que l'autre ne se réduise de la même manière. Ensuite pour réduire $\frac{143}{65}$ je divise 143 par 65, ce qui me donne 2 pour quotient, & 13 pour reste. Il ne faut donc plus, par le même principe, que chercher le plus grand commun diviseur de 13 & de 65. Car on voit que le plus grand commun diviseur de ces deux nombres sera aussi celui de 143 & de 65, à cause que la fraction $\frac{143}{65}$ se change en $2 + \frac{13}{65}$.

Présentement le plus grand commun diviseur de 13 & de 65 est 13 lui-même, puisqu'il

divise exactement 65. Donc 13 est aussi le plus grand commun diviseur de 143 & de 65, donc il est aussi celui des nombres proposés 637, 143. En effet 637 est 49×13 & 143, 11×13 , d'où l'on tire $\frac{637}{143} = \frac{49}{11}$ fraction irréductible.

L X X I.

Méthode
générale de
trouver le
plus grand
commun di-
viseur de
deux nom-
bres.

On peut s'assurer facilement que la méthode qu'on vient de suivre dans l'exemple précédent peut s'appliquer à quelques nombres que ce soit. Qu'on ait en général deux nombres A & B , & que le quotient de la division du premier par le second soit a & le reste C , la question sera réduite à trouver le plus grand commun diviseur de B & de C ; b étant supposé alors le quotient de B par C , & D le reste, il ne s'agira plus que de trouver le plus grand commun diviseur de C & de D , c'est-à-dire, de diviser C par D , & de se servir du reste pour diviser D . Allant ainsi de division en division jusqu'à ce qu'on arrive à deux nombres dont le plus petit soit contenu exactement dans le plus grand, ce nombre contenu exactement sera le plus grand diviseur commun des deux premiers nombres A & B .

Cette règle dans toute sa généralité, comme dans l'exemple précédent, est fondée sur ce que la fraction $\frac{A}{B}$ devenant $a + \frac{C}{B}$ ne sçauroit s'abaisser que lorsque $\frac{C}{B}$ s'abaisse, que $\frac{C}{B}$ ne sçauroit se réduire que de la même manière que $\frac{B}{C}$, & que $\frac{B}{C}$ étant $b + \frac{D}{C}$ ne sçauroit se réduire sans que $\frac{D}{C}$ se réduise & ainsi de suite.

Voyons présentement quels sont les changemens qu'il faut faire à cette méthode pour l'appliquer aux quantités Algebriques, & pour plus de clarté prenons d'abord un exemple.

Supposons qu'il s'agisse de trouver le plus grand commun diviseur des quantités $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$. Il faudroit, suivant la méthode précédente, diviser la premiere de ces deux quantités par la seconde; mais comme la division ne sçauroit se faire à cause que le premier terme $3a^3$ du dividende ne contient pas exactement le premier terme du diviseur, je multiplie toute la premiere quantité par 4, & je remarque que 4 n'étant point un des diviseurs de la seconde quantité $4aa - 5ba + bb$, il ne peut pas y avoir d'autre plus grand commun diviseur entre $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ & $4aa - 5ba + bb$ qu'entre $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

Je divise alors suivant les regles précédentes $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ par $4a^2 - 5ba + bb$; j'ai pour quotient $3a$, & pour reste $3baa + bba - 4b^3$, ce qui, suivant les mêmes regles, demanderoit qu'on divisât $4a^2 - 5ba + bb$ par $3baa + bba - 4b^3$, mais comme la division de ces quantités ne sçauroit se faire sans les préparer auparavant, je remarque d'abord que b étant commun à tous les termes de la derniere quantité & ne l'étant pas à ceux de la seconde, il ne sçauroit être partie du plus grand commun diviseur de ces quan-

tités, ainsi je l'ôte de tous les termes de cette seconde quantité, & je prends à sa place $3aa + ba - 4b^2$. Je remarque ensuite qu'en multipliant la première quantité $4aa - 5ba + bb$ par 3 qui n'est point un diviseur de $3aa + ba - 4b^2$ la division sera possible; je fais donc cette division de $12aa - 15ab + 3bb$ par $3aa + ba - 4bb$, ce qui me donne 4 pour quotient & pour reste $-19ab + 19bb$.

Il n'est donc plus question présentement que de trouver le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$, & de $-19ab + 19bb$. Comme il faudroit, pour cette opération, diviser la première de ces deux quantités par la seconde, & que pour pouvoir diviser les deux premiers termes de ces quantités, il faudroit multiplier la première par $19b$ qui est un diviseur exact de la seconde, j'ôte ce diviseur de la seconde, ce qui la réduit à $-a + b$.

Mais le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$ & de $-a + b$, est $-a + b$ lui-même, puisque la division de ces deux quantités se fait exactement. Donc $-a + b$ est le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$ & de $-19ab + 19bb$; Donc il est aussi le plus grand commun diviseur de $12aa - 15ab + 3bb$ & de $3aa + ba - 4bb$, donc il l'est encore de $4aa - 5ba + bb$, & de $3baa + bba - 4b^3$, aussi-bien que de $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ & de $4aa - 5ba + bb$. Donc il est enfin le plus grand diviseur commun des quantités proposées $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

LXXIII.

Il n'est pas difficile maintenant de voir qu'on réussiroit à peu près de la même manière quelles que fussent les quantités dont on voulut trouver les plus grands communs diviseurs. Le seul principe qu'on soit obligé d'ajouter dans cette recherche à la méthode de l'Article LXXI. c'est que deux quantités quelconques A & B conserveront leur plus grand commun diviseur, si on multiplie ou divise l'une de ces deux quantités, A par exemple, par une quantité qui n'ait aucun diviseur commun avec B .

On peut énoncer ainsi le procédé de la méthode générale de déterminer les plus grands communs diviseurs. Soient A & B les deux quantités proposées, on commencera par ordonner ces deux quantités par rapport à une des lettres quelconques qu'elles ont de commun. On verra ensuite par quelle quantité m il faudroit multiplier A pour que les termes affectés de la plus haute puissance de la lettre suivant laquelle on l'a ordonnée puissent se diviser par les termes de B affectés de la plus haute puissance de la même lettre; si ce multiplicateur m n'a aucun commun diviseur avec B , on s'en servira pour multiplier A , mais s'il a un commun diviseur n on ôtera ce commun diviseur tant de m que de B , & on ne multipliera A que par $\frac{m}{n}$, ce qui formera une nouvelle quantité C que l'on prendra à la place de A . On prendra de même à la place de B la quantité D qui en vient lorsqu'on l'a divisé

Méthode générale pour trouver le plus grand commun diviseur des quantités algébriques.

F ilj

par le diviseur n qu'il a de commun avec m .

Cela fait, on divisera C par D , & la division faite, si elle est exacte, D sera le plus grand commun diviseur cherché de A & de B ; mais s'il y a un reste E , on fera à l'égard de D & de E la même opération qu'à l'égard de A & de B , & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à deux quantités qui se divisent exactement. Lorsqu'on y sera parvenu, celle de ces deux quantités qui sera contenue exactement dans l'autre, sera le plus grand commun diviseur cherché.

Il est bon de faire remarquer que si avant d'entreprendre l'opération dont on vient de voir la méthode, on apperçoit dans l'une des quantités proposées A ou B quelque quantité qui en soit un diviseur exact & qui ne le soit point de l'autre, il faudra commencer par ôter ce diviseur pour que le calcul soit plus simple.

Afin que les Commencans puissent acquérir quelque facilité dans l'application de cette méthode, j'ai joint les exemples suivans.

L X X I V.

Premier
Exemple.

Soient les quantités $q n p^3 + 3 n p^2 q^2 - 2 n p q^3 - 2 n q^4$ & $2 m p^2 q^2 - 4 m p^4 - m p^3 q + 3 m p q^3$ dans lesquelles nous n'avons trouvé (art. L X I X.) le diviseur commun $p - q$, que parce que nous sçavions d'avance que la première de ces deux quantités divisée par la seconde devoit donner le même quotient que la quantité $n q p^2 - 4 p q^2 n - 2 n q^3$ divisée par $4 m p^3 + 5 m p^2 q + 3 m p q^2$.

Pour réduire présentement ces deux quantités, sans employer autre chose que la méthode précédente, on commencera par ôter qn qui est commun à tous les termes de la première de ces deux quantités, & qui n'est point contenu dans la seconde; on ôtera de même pm qui est commun à tous les termes de la seconde sans être contenu dans la première; & par-là l'opération sera réduite à trouver le plus grand diviseur commun des quantités (A) $-4p^3 - p^2q + 2pq^2 + 3q^3$ & (B) $p^3 + 3ppq - 2pq^2 - 2q^3$.

Divisant A par B, j'ai -4 pour quotient & pour reste (C) $11p^2q - 6pq^2 - 5q^3$, comme il faudroit alors multiplier B par $11q$ pour que son premier terme pût être divisé par le premier terme de C, & que q est contenu dans tous les termes de C, je multiplie simplement B par 11 , & je divise C par q , d'où je n'ai plus à comparer que les deux quantités (D) $11p^3 + 33p^2q - 22pq^2 - 22q^3$, & (E) $11p^3 - 6pq - 5q^3$.

Je divise la première par la seconde, & j'ai pour quotient p & pour reste (F) $39p^2q - 17pq^2 - 22q^3$. Comme il faudroit alors multiplier (E) par $39q$ afin que son premier terme fut divisible par celui de cette nouvelle quantité F, & que q est commun à tous les termes de F, je ne multiplie donc E que par 39 & je divise son produit (G) $429p^3 - 234pq - 195q^3$ par (H) $39p^2 - 17pq - 22q^3$. Le quotient est 11 & le reste (I) $-47pq + 47q^3$.

Pour diviser alors H par I il faudroit mul-

tiplier tous les termes par $47q$; mais cette quantité est un diviseur de H , je l'ôte donc de H & il me reste $q - p$ pour servir de diviseur à $39p^2 - 17pq - 22q^2$. Or la division se fait exactement, donc $q - p$ est le plus grand diviseur commun cherché des quantités proposées.

L X X V.

Second
exemple.

Soient proposées présentement les deux quantités $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$ & $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$, ordonnant ces deux quantités par rapport à a j'ai $2aa + ba - ca - 3bb - 4bc - cc$ & $2aa + 9ca - 5ba - 12bb + 8bc + 4cc$, ou (A) $2aa + \overline{b - c} \times a - 3bb - 4bc - cc$ & (B) $2aa + 9c - 5b \times a - 12bb + 8bc + 4cc$.

Divisant la première par la seconde, j'ai 1 pour quotient & pour reste (C) $6b - 10c \times a + 9bb - 12bc - 5cc$. Pour diviser B par cette quantité, je vois qu'il faudroit auparavant la multiplier par $3b - 5c$. Mais avant d'en faire l'opération, je tente la division de C par $3b - 5c$, elle réussit, & donne pour quotient (D) $2a + 3b + c$; je n'ai donc plus qu'à chercher le plus grand commun diviseur de B & de D; mais B est divisible exactement par D, donc D ou $2a + 3b + c$ est le plus grand commun diviseur cherché de $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$ & de $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$. En effet la première de ces deux quantités est le produit de $2a + 3b + c$ par $a - b - c$, la seconde le produit de

$2a + 3b + c$ par $a - 4b + 4c$, & ces deux quantités $a - b - c$ & $a - 4b + 4c$ n'ont plus aucun commun diviseur.

L X X V I.

Soient les deux quantités (A) $\overline{dd - cc} \times a^2 + c^4 - d d c c$ & (B) $4da^2 - 2cc + 4cd \times a + 2c^3$ ordonnées par rapport à a . Je change d'abord B en (C) $2da^2 - cc + 2cd \times a + c^3$ en ôtant de tous les termes le diviseur 2 qui n'est pas commun avec A. Je multiplie ensuite A par $2d$ afin de rendre la division possible, ce qui me donne pour quotient $\overline{dd - cc}$ & pour reste (D) $\overline{dd - cc} \times cc + 2cd \times a - \overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, si on vouloit alors que cette quantité servit de diviseur à C, il faudroit multiplier auparavant C par $\overline{dd - cc} \times cc + 2cd$ afin que son premier terme permit la division.

Troisième
Exemple.

Mais avant de faire cette multiplication, il faut sçavoir si $\overline{dd - cc} \times cc + 2cd$, ne seroit point ou un diviseur ou un multiple de quelque diviseur de D. Pour le sçavoir, je cherche le plus grand commun diviseur de $\overline{dd - cc} \times cc + 2cd$ & de $\overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, c'est-à-dire de $ddcc - c^4 + 2cd^3 - 2c^3d$ & de $ddc^3 + c^4 + 2dc^4 - 2d^3cc$; mais je vois tout de suite que la seconde de ces quantités n'est autre chose que le produit de la première par $-c$, & partant que la quantité D se réduit au produit de $\overline{dd - cc} \times cc + 2ac$ par $a - c$, donc au lieu de multiplier C par $\overline{dd - cc} \times cc + 2dc$, je divise

D par cette quantité & il vient (*E*) $a - c$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec *C*; or $a - c$ divise exactement *C*, donc $a - c$ est le plus grand diviseur cherché.

LXXVII.

Autre manière de résoudre le même exemple.

Au reste avec un peu d'habitude dans le calcul, on découvre souvent le plus grand commun diviseur de deux quantités plus facilement que par la méthode générale qu'on vient d'expliquer. Par exemple les deux quantités précédentes $dd - cc \times aa + c^4 - ddc$ & $4daa - 2cc + 4cd \times a + 2c^3$ étant ordonnées par rapport à *d*, & par conséquent étant sous cette forme $aa - cc \times dd + c^4 - aac$ & $4ca - 4aa \times d + 2c^3 - 2c^2a$, il est aisé de découvrir que $aa - cc$ est un diviseur de la première, & $c - a$ un diviseur de la seconde. Mais $aa - cc$ est divisible par $c - a$, donc $c - a$ est un diviseur des deux quantités proposées, je les divise donc l'une & l'autre par $c - a$, & j'ai pour leurs quotients $cc - dd \times c + a$; & $4ad + 2cc$ qu'on voit assez facilement n'avoir plus de commun diviseur, donc $c - a$ ou $a - c$ étoit le plus grand commun diviseur des quantités proposées.

LXXVIII.

Autres quantités dont on trouve le plus grand commun diviseur sans la

Qu'on se propose maintenant de chercher le plus grand commun diviseur des deux quantités $6a^4 + 15a^3b - 4a^2cc - 10aabc$ & $9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3$.

je commence par ôter aa de tous les termes de la premiere; & $3b$ de tous ceux de la seconde. J'ai alors $6a^3 + 15a^2b - 4acc - 10bcc$ & $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$; mais comme la seconde de ces deux quantités ne contient aucun b , je conclus que si elle a un commun diviseur avec la premiere, il faut qu'elle l'ait séparément avec ses deux parties $6a^3 - 4acc$ & $15a^2b - 10bcc$, & que ces deux parties doivent aussi avoir entr'elles le même commun diviseur. Or on voit tout de suite que $3aa - 2cc$ est le diviseur commun de ces deux parties, donc il est le plus grand commun diviseur des quantités proposées si elles en ont un. Le prenant donc pour diviser ces deux quantités on voit qu'en effet il les divise & qu'il est par conséquent leur plus grand commun diviseur.

LXXIX.

On a vû suffisamment par ce qui précède que pour trouver les deux inconnues que renferme un Problème, il faut avoir deux Equations, il n'est pas difficile d'imaginer en partant de-là que lorsqu'il y aura trois inconnues dans un Problème, il faudra trois Equations & ainsi de suite. Quant à la maniere de dégager les inconnues de ces Equations, elle ne sera pas difficile non plus à imaginer après ce qu'on en a vû pour celles qui ne renferment que deux inconnues. Car qu'on ait trois Equations contenant chacune les trois inconnues x, y, z ; si on tire la valeur de x de chacune de ces Equations.

Lorsqu'il y a trois inconnues dans un Problème, il faut trois Equations pour le résoudre.

Comment on dégage les inconnues de ces Equations.

tions exprimée par le moyen des connues & des deux autres inconnues y , z , de ces Equations, il est évident qu'en égalant les unes aux autres ces différentes valeurs de x , on aura deux nouvelles Equations qui ne contiendront plus que les deux inconnues y & z , & qui seront par conséquent dans le cas de celles dont nous venons de parler. Il en seroit de même des Equations à quatre, cinq &c. inconnues.

Comme la méthode générale qu'on vient d'expliquer peut renfermer des difficultés dans l'exécution, nous allons en montrer l'application dans le Problème suivant qui renfermera la plus grande complication que peuvent avoir les Equations du premier degré à trois inconnues.

L X X X.

Problème
dans lequel
on employe
trois inconnues.

On sçait ce que trois magasins contenant chacun trois sortes de denrées, on couté les uns & les autres séparément; on sçait de plus le nombre de mesures que chaque magasin contient de ces trois différentes denrées; on demande à combien revient une mesure de chaque denrée.

Soient a , b , c , les nombres de mesures de chaque denrée contenue dans le premier magasin, & soit d le prix de ce magasin.

Soient de plus e , f , g , les mesures des mêmes denrées contenues dans le second magasin dont le prix est supposé h .

Soient encore i , k , l les mesures des mêmes denrées contenues dans le troisième magasin dont le prix est supposé m .

Soient enfin x, y, z ce que coûte une mesure de chaque denrée.

Il est évident que la quantité de la première denrée contenue dans le magasin d coûtera ax , puisque a est le nombre des mesures de cette denrée & x le prix de la mesure de cette denrée. De même la quantité de la seconde denrée contenue dans le même magasin coûtera by , & la quantité de la troisième denrée contenue dans le même magasin coûtera cz . Ajoutant donc ces trois sommes pour les égaler au prix d de ce magasin, on aura l'Equation

$$ax + by + cz = d,$$

on formera de même les Equations,

$$ex + fy + gz = h, \quad ix + ky + lz = m.$$

en exprimant les conditions mentionnées pour les deux autres magasins.

Il est question maintenant de tirer de ces Equations les valeurs de x, y, z . Dans cette vue on tirera d'abord la valeur de x de la première Equation qui sera

$$\frac{d - by - cz}{a}, \text{ \& \acute{e}galant cette valeur de } x \text{ \acute{a} celle qu'on tire de la}$$

seconde Equation, on aura l'Equation

$$\frac{d - by - cz}{a} = \frac{h - fy - gz}{e}.$$

Egalant ensuite la même valeur $\frac{d - by - cz}{a}$

\acute{a} celle qu'on tire de la troisième Equation,

$$\text{on aura l'Equation } \frac{d - by - cz}{a} = \frac{m - ky - lz}{i}$$

De la premiere de ces deux Equations entre y & z , on tirera $de - bey - cez = ah -$

$$afy - agz \text{ ou } z = \frac{de - ah + afy - bey}{ce - ag}$$

De la seconde on tirera $di - biy - icz = am - ak y - al z$

$$\text{ou } z = \frac{di - am + ak y - biy}{ci - al}$$

En égalant ces deux valeurs de z il est clair qu'on auroit une Equation où il n'entreroit plus d'autre inconnue que y , & qu'en résolvant cette Equation on connoîtroit y . Comme les calculs que l'on auroit par cette opération seroient assez considérables, je vais faire voir la maniere de les éviter en employant quelques abbreviations que les premiers Analystes qui ont eu de grands calculs à faire ont aisément imaginées.

LXXXI.

Ces abbreviations consistent à mettre de nouvelles lettres à la place de plusieurs termes composés de connues.

Maniere
d'abréger les
Calculs par
des dénomi-
nations par-
ticulieres.

Au lieu de ... $de - ah$ je mettrai ... α

Au lieu de ... $af - be$ β

Au lieu de ... $ce - ag$ γ

Au lieu de ... $di - am$ δ

Au lieu de ... $ak - bi$ ϵ

Au lieu de ... $ci - al$ ϕ

Par ces nouvelles dénominations les Equa-

tions précédentes deviendront $z = \frac{\alpha + \beta \gamma}{\gamma}$

& $z = \frac{\delta + \epsilon \gamma}{\phi}$ lesquelles donneront $\alpha \phi + \beta \phi \gamma = \delta \gamma + \gamma \epsilon \gamma$ d'où l'on tire

$\gamma = \frac{\alpha \phi - \delta \gamma}{\gamma \epsilon - \beta \phi}$ substituant ensuite cette valeur de γ dans l'une des deux valeurs précédentes de z , dans la première par exemple, on aura

$$z = \alpha + \frac{\beta \alpha \phi - \beta \gamma \delta}{\gamma \epsilon - \beta \phi}$$

qui se réduit à $z = \frac{\alpha \epsilon - \beta \delta}{\gamma \epsilon - \beta \phi}$

Cela fait, on mettra ces valeurs de γ & de z dans l'une des valeurs précédentes de x , dans $\frac{d - c z - b \gamma}{a}$ par exemple, & l'on aura

$$x = \frac{d}{a} - \frac{c}{a} \times \frac{\alpha \epsilon - \beta \delta}{\gamma \epsilon - \beta \phi} - \frac{b}{a} \times \frac{\alpha \phi - \delta \gamma}{\gamma \epsilon - \beta \phi}$$

$$\text{ou } x = \frac{d \times \gamma \epsilon - \beta \phi - c \times \alpha \epsilon - \beta \delta - b \times \alpha \phi - \delta \gamma}{a \times \gamma \epsilon - \beta \phi}$$

LXXXII.

Pour montrer présentement l'application de cette méthode, supposons que le premier magasin contienne 30 mesures de seigle, 20 d'orge & 10 de froment, & qu'il ait coûté 230 lb.

Que le second magasin contienne 15 mesures de seigle, 6 d'orge & 12 de froment & qu'il ait coûté 138 lb.

Exemple du
Problème
précédent en
nombres.

Que le troisième magasin contienne 10 mesures de seigle, 5 d'orge, 4 de froment & qu'il ait coûté 75 lb. Pour sçavoir à combien revient la mesure de seigle, celle d'orge & celle de froment, il faudra faire

$a=30, b=20, c=10, d=230$
 $e=15, f=6, g=12, h=138$
 $i=10, k=5, l=4, m=75$, ce qui donnera
 $de-ab=a=-690, af-bc=f=-120$
 $cc-ag=g=-210, di-am=s=50$
 $ak-bi=i=-50, ci-al=p=-20$
 substituant ensuite ces valeurs dans les quantités
 $\alpha\varphi-\gamma\delta, \gamma\varepsilon-\beta\varphi, \alpha\varepsilon-\beta\delta$ on aura
 24300, 8100, 40500 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent

$$\gamma = \frac{24300}{8100} = 3, \quad \varepsilon = \frac{40500}{8100} = 5$$

$$\& x = \frac{210 \times 8100 - 10 \times 40500 - 10 \times 24300}{30 \times 8100} = 4$$

Ainsi le prix de la mesure de seigle est de 4 lb.
 Celui de la mesure d'orge de 3 lb.
 Et celui de la mesure de froment de ... 5 lb.

LXXXIII.

Tous les Problèmes du premier degré à trois inconnues, peuvent, étant mis en Equations, être compris dans le Problème précédent. Comme les Equations du Problème précédent sont les plus générales du premier degré à trois inconnues, puisque chacune contient les trois inconnues combinées avec des connues quelconques, il s'ensuit que tout Problème du premier degré à trois inconnues sera renfermé dans le précédent aussi-tôt qu'il sera exprimé analytiquement. Pour en donner un exemple soit proposé le Problème suivant. On

On a trois lingots composés de différens métaux fondus ensemble,

La livre du premier contient

	<small>onces</small>	<small>onces</small>	<small>onces</small>
.....	7 d'arg.	3 de cuiv.	6 d'étain,
celle du 2 ^d	12	3	1,
celle du 3 ^{eme}	4	7	5.

On demande ce qu'il faut prendre de chacun de ces lingots pour en former un quatrième qui contienne

<small>onces</small>	<small>onces</small>	<small>gros</small>	<small>onces</small>	<small>gros</small>
8 d'arg.	3	6 cuiv.	4	2 étain

Soient x, y, z les nombres d'onces qu'il faut prendre de chacun de ces métaux.

Il est évident que $\frac{7}{16}x$ fera ce qu'il y aura d'argent dans ce qu'on tirera du premier lingot
que $\frac{11}{16}y$ fera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du second lingot

& que $\frac{4}{16}z$ fera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du troisiéme.

Ajoutant donc ces trois quantités leur somme devra être 8 onces d'argent, donc on a l'Equation $\frac{7}{16}x + \frac{11}{16}y + \frac{4}{16}z = 8$ ou $7x + 11y + 4z = 128$.

On aura de même pour ce qu'on tirera de cuivre des trois métaux, $\frac{3}{16}x, \frac{3}{16}y$ & $\frac{7}{16}z$ dont la somme doit faire 3 onces 6 gros ou $\frac{11}{4}$ onces ce qui donnera $\frac{3}{16}x + \frac{3}{16}y + \frac{7}{16}z = \frac{11}{4}$ ou $3x + 3y + 7z = 60$.

Ce qu'on tirera d'étain des trois métaux fera pareillement $\frac{6}{16}x, \frac{1}{16}y, \frac{5}{16}z$ dont la somme doit faire 4 onces 2 gros ou $4\frac{1}{4}$ onces donc

$$\frac{6}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{5}{16}z = 4 + \frac{1}{4}$$

ou $6x + y + 5z = 68$.

Il ne s'agit donc plus que de résoudre ces trois Equations, c'est ce que l'on tirera facilement de la solution précédente en faisant

$$\begin{array}{llll} a=7 & b=12 & c=4 & d=128, \\ e=3 & f=3 & g=7 & h=60, \\ i=6 & k=1 & l=5 & m=68, \end{array}$$

par lesquelles on trouvera

$$\begin{aligned} de - ba &= a = -36; \quad af - be = p = -15; \\ ce - ag &= r = -37, \\ di - am &= s = 292, \quad ak - bi = t = -65; \\ ci - al &= q = -11, \end{aligned}$$

substituant ensuite ces valeurs dans les quantités $\alpha\phi - \gamma\delta$, $\gamma\epsilon - \beta\phi$, $\alpha\epsilon - \beta\delta$ on aura

11200, 2240, 6720 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent

$$\begin{aligned} y &= \frac{11200}{2240} = 5, \quad z = \frac{6720}{2240} = 3 \quad \& \\ x &= \frac{128 \times 2240 - 4 \times 6720 - 12 \times 11200}{7 \times 1240} = 8, \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il faut prendre 5 onces du premier lingot, 3 onces du second & 8 du troisième, pour former le lingot demandé.



ELEMENS D'ALGEBRE.

SECONDE PARTIE.

*De la résolution des Equations du
second degré.*

NOUS avons présentement assez traité des Problèmes du premier degré pour passer à ceux des autres degrés, & particulièrement aux Problèmes du second degré que nous allons examiner dans cette seconde Partie. Quant à la maniere d'exprimer analytiquement leurs conditions, elle est la même que dans les Problèmes du premier degré, ce n'est que pour résoudre les Equations auxquelles on arrive en exprimant les Problèmes qu'il faut employer des méthodes différentes suivant les degrés de ces Equations. On en peut voir un exemple dans le Problème suivant, qui dans sa généralité renferme des Problèmes de tous les degrés, & n'est pas plus

difficile à exprimer analytiquement pour le degré le plus composé, que pour le plus simple.

I

Problème
qui contient
dans sa gé-
néralité des
Problèmes de
tous les dé-
grés.

Un homme ayant placé une somme a dans un commerce où il perd, veut se retirer dès la première année; mais en ayant manqué l'occasion & ne l'ayant pu retrouver qu'à la deuxième ou à la troisième, ou en général à la $n^{\text{ème}}$ année, il trouve que la somme est diminuée de la quantité b de ce qu'elle étoit après la première année. On demande à combien pour cent montoit sa perte par an.

Soit x le nombre cherché, c'est-à-dire ce que chaque cent livres perd après la première année. En faisant cette proportion $100 : 100 - x$

$x = a : a \times \frac{100 - x}{100}$, le quatrième terme

$a \times \frac{100 - x}{100}$ ou $a \times 1 - \frac{x}{100}$ exprimera ce que devient la somme a après la première année.

Si on continue ensuite cette proportion en disant

$$100 : 100 - x = \frac{a \times \frac{100 - x}{100}}{100} : \frac{a \times \frac{100 - x}{100}}{10000}$$

le quatrième terme $\frac{a \times \frac{100 - x}{100}}{10000}$ ou $a \times 1 - \frac{x}{100}$ fera ce que devient la même somme a après la seconde année.

On exprimera de même ce que cette somme devient après la troisième année par

$a \times 1 - \frac{x}{100}$, & en général ce qu'elle devient

après la $n^{\text{ème}}$ année sera $a \times 1 - \frac{x}{100}$, c'est-

à-dire a multiplié par la quantité $1 - \frac{x}{100}$ élevée à la puissance n .

I I.

Présentement si on veut sçavoir quelle sera l'Equation à résoudre, en supposant que le négociant se soit retiré à la seconde année, il faudra égaler

la quantité $a \times 1 - \frac{x}{100}$ à la quantité $a \times 1 - \frac{x}{100}$ diminuée de la quantité b , ce qui donnera

$a \times 1 - \frac{x}{100} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$, ou en mul-

tipliant $1 - \frac{x}{100}$ par lui-même, ainsi que l'in-

dique l'Exposant 2, $a \times 1 - \frac{x}{100} + \frac{x^2}{10000} =$

$a \times 1 - \frac{x}{50} - b$ qui se réduit à $x - 100x =$

$-10000 \frac{b}{a}$ Equation du second degré à laquelle les méthodes précédentes ne sçauroient atteindre.

I I I.

Si on suppose que ce ne soit qu'à la troisième année, l'Equation à résoudre sera

$a \times 1 - \frac{x}{100} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$ qui, en multi-

pliant $1 - \frac{x}{100}$ deux fois par lui-même, ainsi

que l'indique l'Exposant 3, devient

Pour le troisième degré. $a \times 1 - \frac{3x}{100} + \frac{3x^2}{10000} - \frac{x^3}{1000000} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$

ou enfin

$$x^3 - 300x^2 + 20000x = -1000000 \frac{b}{a}$$

Equation qui doit naturellement promettre plus de difficulté que la précédente.

IV.

Quant aux autres cas on voit aisément comment on parviendroit successivement à former les Equations qu'ils donneroient, l'induction montre que l'Equation seroit toujours du degré exprimé par le nombre n ; si on veut avoir cette Equation en général sans spécifier le nombre n ; on n'aura qu'à employer l'expres-

Pour le degré n . sion générale $a \times 1 - \frac{x^n}{100}$ de la quantité que devient a après la n^{me} année & l'Equation sera

$$a \times 1 - \frac{x^n}{100} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b \text{ ou } \dots$$

$$1 - \frac{x}{100} = 1 - \frac{x}{100} - \frac{b}{a}$$

V.

Contentons nous présentement de résoudre le Problème dans le cas où son Equation est du second degré, c'est-à-dire lorsqu'elle est $x^2 - 100x = -10000 \frac{b}{a}$, ou plutôt cher-

Maniere d'arriver à la solution générale des Equations du second degré.

chons une méthode pour résoudre généralement toutes les Equations du second degré. Ceux qui voudront résoudre des cas plus élevés du même Problème, y parviendront facile-

ment aussi-tôt qu'ils auront vû dans la suite, les méthodes générales qui conviennent aux degrés que ces Equations donnent.

Ce qui se présente le plus naturellement en cherchant une méthode pour résoudre généralement les Equations du second degré, c'est de voir la liaison qu'il peut y avoir entre ces Equations & celles du premier ; or il est clair que toute Equation du premier degré deviendra du second , si on en quarre les deux membres , par exemple $x + a = b$ donne étant quarrée $x^2 + 2ax + a^2 = b^2$; reste donc à sçavoir si , par une opération contraire , on pourroit rappeler toute Equation du second degré à une du premier. Prenons , par exemple l'Equation $x^2 + px = q$ qui exprimera toute Equation du second degré selon les valeurs qu'auront p & q , ces lettres pouvant désigner toutes sortes de quantités positives ou négatives. Suivant ce que nous venons de dire il n'y a qu'à voir si $x^2 + px$ ne seroit pas le carré de quelque quantité dont la premiere partie seroit x , & dont la seconde seroit une connue, afin de trouver par ce moyen l'Equation du premier degré, qui , étant quarrée seroit devenue $x^2 + px = q$. Or on voit facilement que $x^2 + px$ n'est pas un carré , mais on voit en même-tems qu'il peut le devenir par quelque addition , & l'on a , comme on sçait , la liberté de faire cette addition , pourvu qu'on ajoute la même quantité de l'autre côté de l'Equation.

Afin de trouver ce qui manque à $x^2 + px$ pour [en faire un carré , il n'y a autre chose

à faire qu'à comparer cette quantité avec le quarré $xx + 2ax + aa$; le terme px répondant à $2ax$; p répondra à $2a$ & partant a à $\frac{1}{2}p$; or comme a est ce qui manque à $xx + 2ax$ pour en faire un quarré, le quarré de $\frac{1}{2}p$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}p^2$ fera ce qui manque à $xx + px$ pour en faire un quarré, c'est-à-dire que $xx + px + \frac{1}{4}p^2$ fera un quarré; il est en effet & c'est celui de $x + \frac{1}{2}p$. Ayant donc ajouté $\frac{1}{4}pp$ au premier membre de l'Equation, il faut en ajouter autant de l'autre côté, & l'Equation sera $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$. Or la quantité $x + \frac{1}{2}p$ multipliée par elle-même donne $xx + px + \frac{1}{4}pp$; il faut donc que cette quantité soit aussi égale au nombre qui, multiplié par lui-même, donnera $q + \frac{1}{4}pp$. Pour exprimer ce nombre, ou plutôt cette quantité en général on écrit $\sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$. Employant le signe $\sqrt{}$, qu'on appelle signe radical, pour faire * ressouvenir qu'il faut prendre la racine quarrée de la quantité qui le suit, laquelle doit être toujours, pour éviter la confusion, surmontée d'une barre ou renfermée entre des parentheses.

Le signe $\sqrt{}$ indique la racine quarrée.

On a donc en employant cette dénomination $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$ valeur de x dans l'Equation proposée $xx + px = q$, &

* Le nombre qui multiplié par lui-même en a formé un autre est dit sa racine quarrée, ou simplement sa racine; cette définition connue en arithmétique est aussi admise en Algebre pour toutes sortes de quantités.

cette valeur servira pour toute Equation donnée aussi-tôt qu'en comparant cette Equation avec $xx + px = q$, on en aura déduit les valeurs particulieres de p & de q .

VI.

Si on se souvient presentement que l'on a trouvé (I. Part. art. LX.) qu'en multipliant une quantité négative par une quantité négative, il en vient aussi-bien une quantité positive, que si on avoit multiplié deux quantités positives l'une par l'autre, on verra que la racine d'une quantité positive pourra toujours être affectée du signe que l'on voudra; ainsi au lieu de l'Equation $x + \frac{1}{2}p = +\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$

La racine quarrée d'une quantité est aussi-bien négative que positive.

on peut écrire $x + \frac{1}{2}p = -\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, ce qui donneroit alors $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$; d'où l'on tire ce principe général qu'une Equation quelconque du second degré a toujours deux racines. On entend alors par racine d'une Equation la valeur de l'inconnue dans cette Equation. Il faut bien prendre garde de confondre cette expression avec celle de la racine quarrée.

Une Equation du second degré a deux racines, c'est-à-dire deux valeurs d' x .

VII.

Pour renfermer dans une seule & même expression les deux racines ou valeurs de x dans l'Equation précédente $xx + px = q$, on se sert du signe \pm , & l'on écrit ainsi ces deux valeurs $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$.

Formule contenant ces deux racines.

VIII.

Appliquons maintenant cette solution géné-

Application
de la formule
précédente à
l'Equation
de l'Art. II.

rale à l'Equation $xx - 100x = -10000 \frac{b}{a}$
à laquelle nous étions arrivés dans le problème
précédent. En comparant cette Equation avec
 $x^2 + px = q$, nous aurons $p = -100$; $q =$
 $-10000 \frac{b}{a}$, & faisant les substitutions de ces
valeurs à la place de p & de q dans la formule gé-
nérale $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, il viendra
 $x = 50 \pm \sqrt{2500 - 10000 \frac{b}{a}}$.

I X.

Réduction
de la valeur
d' x en for-
mant la raci-
ne du produit
par celles des
produisans.

On peut donner une forme un peu plus simple
à la partie radicale $\sqrt{2500 - 10000 \frac{b}{a}}$ de cet-
te valeur de x en partant de ce principe que la
racine quarrée du produit de deux ou de plu-
sieurs quantités est le produit des racines quar-
rées de ces quantités; car décomposant alors
 $2500 - 10000 \frac{b}{a}$ en ses deux produisans
 2500 & $1 - \frac{4b}{a}$, & prenant les racines de ces
deux quantités, on aura 50 & $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$,
dont le produit $50 \sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, sera la valeur de
 $\sqrt{2500 - 10000 \frac{b}{a}}$, c'est-à-dire que la valeur
de x sera $50 \pm 50 \sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$.

Quant à la démonstration de ce principe que
la racine d'un produit quelconque, se trouve
en multipliant les racines de ses produisans, elle
est bien facile à imaginer, lorsqu'on se rappelle
l'inverse de ce principe, c'est-à-dire, que pour

quarrer un produit, comme ab , on multiplie l'un par l'autre, les quarrés aa & bb de les produifans a & b .

X.

Pour faire usage de cette valeur de x , il n'est plus Exemple de ce Problème. besoin que de ſçavoir quel est le rapport qu'on veut qu'il y ait entre b & a . Supposons, par exemple, que b ſoit la partie $\frac{6}{25}$ de a , c'est-à-dire, que le négociant ait trouvé à la ſeconde année la ſomme diminuée de ce qu'elle étoit après la première d'une quantité égale au $\frac{6}{25}$ du total, on aura par cette ſuppoſition $\frac{4b}{a} = \frac{24}{25}$ & $1 - \frac{4b}{25} = \frac{1}{25}$, d'où la racine $\sqrt{1 - \frac{4b}{25}}$ fera $\frac{1}{5}$ & donnera par conſéquent $x = 50 \pm 50 \times \frac{1}{5}$ qui exprime à la fois 60 & 40.

Or ces deux valeurs de x reſolvent en effet également l'Equation $xx - 100x = -2400$ dans laquelle l'Equation générale $xx - 100x = -10000 \frac{b}{a}$ ſe change par la ſuppoſition de $\frac{b}{a} = \frac{6}{25}$: Car $xx - 100x$ devient également -2400 , ſoit qu'on faſſe $x = 60$; ſoit qu'on faſſe $x = 40$.

On peut encore d'une manière plus convainquante reconnoître la néceſſité des deux ſolutions 60 & 40. Car qu'on ſuppoſe d'abord $x = 60$, c'est-à-dire que la ſomme de 100000 lb par exemple, perde 60 pour cent par an, il eſt évident qu'après la première année elle ſera réduite à 40000 lb.

A la secondé année elle sera de 16000 lb en perdant encore 60 pour cent; or 16000 lb sont plus petits que 40000 lb de 24000 lb qui sont les $\frac{6}{25}$ de 100000.

Qu'on suppose à present que la même somme de 100000 lb perde 40 pour cent par an, après la 1^{re} année elle sera réduite à 60000 lb & après la 2^{de} à 36000 lb or 36000 lb sont encore plus petits que la somme 60000 lb de la quantité de 24000 lb ou des $\frac{6}{25}$ de 100000 lb

X I.

Autre
exmple.

Si on veut que b soit les $\frac{4}{25}$ de a , on aura

$$x = 50 \pm 50 \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 50 \pm 50 \sqrt{\frac{9}{25}} = 50 \pm 30, \text{ c'est-à-dire ou } 80 \text{ ou } 20 \text{ qu'on trou-}$$
 vera encore résoudre également le Problème.

X I I.

Troisième
exemple qui
demandant
la racine d'u-
ne quantité
négative est
impossible.

Mais si l'on suppose $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, on trouvera

$$x = 50 \pm 50 \sqrt{1 - \frac{1}{3}}, \text{ ou } 50 \pm 50 \sqrt{-\frac{1}{3}}. \text{ Or}$$
 comme on ne sçauroit trouver aucune quantité qui étant multipliée par elle-même donne —, il s'ensuit que la quantité $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ ne sçauroit être réelle, ou ce qui revient au même, que le Problème est impossible dans ce cas.

Ainsi on peut être assuré qu'il n'y a aucune valeur possible à substituer pour x dans l'Equation $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$ qui fasse que les deux membres en deviennent égaux; ou ce qui revient au même, que la somme a ne sçauroit être altérée chaque année suivant aucune pro-

portion donnée qui soit telle que de la seconde à la troisième année la diminution soit d'une quantité égale au tiers du total. Les Géomètres regardent cependant comme une espèce de solution ou de racine de l'Equation $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$, la valeur $50 + 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$ qu'ils

trouvent alors, mais ils l'appellent une racine imaginaire, & cette racine imaginaire à cause du signe $+$ est toujours censée une double solution.

Ces racines
sont dites
imaginaires.

XIII.

On voit par la valeur générale $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$ de x , que toutes les fois que la quantité désignée par q , sera négative & plus grande que $\frac{1}{4}pp$, les deux racines de l'Equation $xx + px = q$, seront toutes deux imaginaires.

Quelles sont
les Equations
du second degré,
dont les
racines sont
imaginaires.

XIV.

Lorsqu'on a une Equation quelconque du second degré, on peut la résoudre sans la comparer terme à terme avec l'Equation générale $xx + px = q$; car on peut, sans augmenter le calcul, répéter le même procédé qu'on a suivi en résolvant cette Equation générale. Il ne faut pour cela qu'ajouter aux deux membres le carré de la moitié de ce qui multiplie x dans le second terme du premier membre, & prendre ensuite la racine carrée des deux membres. Qu'on ait, par exemple, à résoudre l'Equation $xx + 8x = 9$, en ajoutant des deux côtés 16,

Résolution
des Equations
du second degré
sans les comparer à la
formule générale.

quarré de la moitié de 8, on a $x x + 8x + 16 = 9 + 16 = 25$. Et prenant ensuite la racine des deux côtés, on a $x + 4 = 5$, c'est-à-dire $x = 5 - 4$ ou $x = 1$, & ces deux valeurs résolvent également l'Equation $x x + 8x = 9$.

X V.

Pour accoutumer les Commençans aux difficultés qu'on rencontre dans les Problèmes du second degré, nous leur proposerons encore le Problème suivant.

Autre Problème du second degré.

Trouver sur la ligne qui joint deux lumieres quelconques le point où ces deux lumieres éclairent également, en supposant ce principe de physique, que l'effet d'une lumiere est quatre fois plus grand lorsqu'elle est deux fois plus proche, neuf fois plus grand lorsqu'elle est trois fois plus proche, ou pour s'exprimer comme les Géometres, que son effet est en raison renversée du quarré de la distance.

Que a exprime la distance qui est entre les lumieres données, & que le rapport de m à n soit celui qui est entre l'effet de la plus petite lumiere à une certaine distance & l'effet de la plus grande lumiere à la même distance.

De plus, que x exprime la distance de la plus petite des deux lumieres à un point pris à volonté sur la ligne qui joint les deux lumieres, il est clair que $a - x$ sera la distance du même point à l'autre lumiere, que les quarrés de ces deux distances seront x^2 & $x^2 - 2ax + a^2$, & par conséquent que les quantités qui seront en

raison renversée de ces quarrés seront entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$.

De là il suit que si les lumières étoient égales, les effets qu'elles produiroient chacune dans ce même point, seroient entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ à $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$, mais ces lumières ayant des quantités absolues qui sont entr'elles dans la raison de m à n , leurs effets doivent donc être entr'eux comme $\frac{m}{xx}$ à $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$.

Présentement pour que le point pris à volonté devienne le point demandé, il n'y a autre chose à faire qu'à égaler ces deux quantités, ce qui donnera l'Equation $maa - 2amx + mxx = nxx$, qu'on résoudra ainsi.

On commencera par passer les termes mxx & $2amx$ dans l'autre membre, ce qui donnera $n - m \times xx + 2amx = maa$
ou $xx + \frac{2am}{n-m}x = \frac{aa}{n-m}$.

On ajoutera ensuite aux deux membres de cette Equation le quarré de la moitié du coefficient du second terme, & l'on aura

* Ceci doit être facile à entendre à ceux qui auront vu dans l'Arithmétique ce que c'est que des raisons renversées. Il n'y a pas plus de difficulté à voir que $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$ sont en raison renversée de xx & de $xx - 2ax + aa$, qu'à voir que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ sont en raison renversée de 3 & 4.

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{n-m} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{n-m}$$

dont le second membre devient $\frac{aamn}{n-m}$ en

mettant les deux termes $\frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{n-m}$

au même dénominateur & en réduisant.

Cela fait, on prendra la racine des deux membres de l'Equation, & l'on aura $x + \frac{am}{n-m}$

$$= \pm \sqrt{\frac{aamn}{n-m}} \text{ ou } x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m} \sqrt{mn},$$

en prenant la racine de la partie $\frac{aa}{n-m}$, qui

est un quarré parfait, & laissant sous le signe radical son multiplicateur mn , qui n'est pas un quarré du moins dans toutes les valeurs de m & de n . Donc les deux valeurs d' x qui résolvent l'Equation précédente, & par conséquent le Problème qui a conduit à cette Equation sont exprimées par la formule

$$x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m} \sqrt{mn} \text{ ou } x = \frac{a}{n-m} \times -n \pm \sqrt{mn}.$$

XVI.

Des deux valeurs précédentes, l'une est nécessaire-

On voit par cette expression que l'une des valeurs est nécessairement négative & l'autre positive. Car 1°. si on prend le signe — pour la

la quantité radicale \sqrt{mn} , il n'est pas douteux rement positive, l'autre négative. que la quantité totale ne soit négative. 2°. Si on fait \sqrt{mn} positive, $-m + \sqrt{mn}$ qu'on a alors sera positif, parce que ayant fait par la supposition n plus grand que m , \sqrt{mn} doit être plus grand que m .

XVII.

Si on cherche présentement l'usage qu'on doit faire de la valeur négative, on trouvera, Usage de la valeur négative. en se rappelant ce qu'on a vu (I. Part. Art. LXIII.) sur ces valeurs dans les Equations du premier degré, qu'elle doit être prise dans un sens opposé à la première, c'est-à-dire que le point qu'elle donne pour résoudre ce Problème, au lieu d'être placé entre les deux lumières, sera placé sur le prolongement de la ligne qui les joint du côté de la lumière la plus foible.

On n'aura aucune difficulté à admettre cette position de la valeur négative de x , lorsqu'on remarquera que cette même valeur n'a été trouvée négative, que parce qu'on a résolu le Problème, en regardant le point cherché comme placé entre les deux lumières, car si on avoit fait attention à la possibilité de prendre ce point sur le prolongement de la ligne qui les joint, on auroit eu un autre calcul relatif à cette position, & l' x qui auroit été alors placé naturellement sur le prolongement de la ligne qui joint les lumières, auroit été positif.

XVIII.

Pour nous faire mieux entendre, nous allons reprendre le Problème en entier, en supposant le point cherché sur le prolongement de la ligne

qui joint les lumieres. La distance de ce point à la plus petite lumiere étant toujours nommée x , la distance à la plus grande lumiere sera alors $a+x$, les quarrés de ces distances xx & $aa+2ax+xx$; les deux quantités de lumiere $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{aa+2ax+xx}$, lesquelles étant

égales par les conditions du Problème donneront

$$\frac{m}{xx} = \frac{n}{aa+2ax+xx} \text{ ou } maa+2amx$$

$$+mxx = nxx \text{ ou } n-m \times xx = 2amx$$

$$= maa \text{ ou } xx = \frac{2amx}{n-m} = \frac{m}{n-m} aa$$

qui étant résolu donnera

$$x = \frac{a \times m + \sqrt{mn}}{n-m} \text{ dont la premiere valeur}$$

$\frac{a \times m + \sqrt{mn}}{n-m}$ sera positive, & la seule qui résoudra exactement le Problème dans le sens où il est proposé alors.

Quant à la seconde valeur $\frac{a \times m - \sqrt{mn}}{n-m}$ qui est négative, elle doit être alors prise dans un sens opposé à la premiere, c'est-à-dire que le point qu'elle donne doit être placé, non comme on l'a supposé dans ce calcul, sur le prolongement de la ligne qui joint les deux lumieres, mais sur cette ligne elle-même.

• Ainsi dans cette nouvelle solution on a, par rapport aux signes, tout le contraire de ce

qu'on avoit dans la premiere, & ces deux solutions confirment ce que nous avons déjà vu dans la premiere Partie ART. LXIII. que les inconnues qui deviennent négatives doivent toujours être prises dans un sens opposé à celui qu'on leur a donné en exprimant le Problème.

XIX.

Nous ôterons je crois tout embarras aux Lecteurs sur ce Problème en prenant un exemple, supposons que $n = 4m$, c'est-à-dire que la plus grande lumière ait quatre fois plus de force que l'autre ; en substituant cette valeur de n dans la formule générale de l'ART. XV.

$$x = \frac{a}{n-m} \times \frac{m \pm \sqrt{mn}}{2} ; \text{ elle deviendra}$$

$$x = \frac{a}{3} \times \frac{\pm 2 - 1}{2} , \text{ c'est-à-dire ou } + \frac{1}{2} a$$

ou $-a$, qui fournissent deux points également propres à résoudre le Problème, l'un placé entre les deux lumières deux fois plus près de la foible que de la forte, & l'autre sur le prolongement de la ligne qui joint ces lumières, & à une distance de la foible égale à celle qui est entre les deux lumières. Or il est très-facile de voir sans Algebre que ces deux points résolvent également le Problème, puisqu'ils sont l'un & l'autre deux fois plus près de la lumière foible que de la forte, & que la forte est quadruple de la foible.

XX.

Les principes que nous venons de donner sont suffisants pour toutes les Equations du second degré, mais comme les Commencans ne

peuvent gueres les posséder qu'en les pratiquant, nous allons les exercer à la résolution de plusieurs Equations, ils y trouveront cet avantage, qu'outre qu'ils en sçauront mieux la méthode, ils apprendront en même-tems de nouvelles opérations d'Algebre qui sont sans doute dues aux recherches que les premiers Analystes ont fait sur les Equations du second degré.

Nouveaux
exemples de
résolutions
d'Equations
du second
degré.

Soit $bxx = 2c^2x + 2cc a$, en ordonnant cette Equation, c'est-à-dire en passant les termes affectés de x du même côté & divisant tous les termes par le coefficient de xx ,

on aura $x - \frac{2ccx}{b} = \frac{2cca}{b}$, aux deux mem-

bres de laquelle ajoutant $\frac{c^4}{bb}$, & prenant

ensuite la racine quarrée, on aura $x - \frac{cc}{b}$

$$= \pm \sqrt{\frac{2ccab + c^4}{bb}} = \pm \frac{c}{b} \sqrt{2ab + cc};$$

$$\text{c'est-à-dire } x = \frac{cc \pm \sqrt{2ab + cc}}{b}.$$

$$\text{Soit } ff + gg - 2gx + xx = \frac{mmxx}{nn}$$

qui devient d'abord $\frac{mm - nn}{nn} \times xx + 2gx$

$$= ff + gg, \text{ \& ensuite } xx + \frac{2gnn}{mm - nn} x =$$

$$\frac{ffnn + ggnn}{mm - nn} \text{ ou } xx + \frac{2gnn}{mm - nn} x +$$

$$\frac{ggnn}{mm - nn} = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn} + \frac{ggnn}{mm - nn}$$

$$= \frac{ffnnmm + ggmmmm - ffnn^4}{mm - nn}, \text{ d'où}$$

l'on tire

$$x + \frac{gnn}{mm - nn} = + \frac{n\sqrt{ffmm + ggmm - ffnn}}{mm - nn} \text{ ou}$$

$$x = \frac{n}{mm - nn} \times -gn + \sqrt{ffmm + ggmm - ffnn}.$$

Soit $abc - aff + 2afz = azz - bzz$
qui étant d'abord ordonnée deviendra

$$zz - \frac{2af}{a-b} z = \frac{abc - aff}{a-b}, \text{ ensuite}$$

$$zz - \frac{2af}{a-b} z + \frac{aaff}{a-b} = \frac{abc - aff}{a-b} + \frac{aaff}{a-b}$$

$$\frac{aaff}{a-b} = \frac{aabc - abbc + abff}{a-b} \text{ qui}$$

$$\text{donne } z = \frac{af + \sqrt{aabc - abbc + abff}}{a-b}.$$

Soit à présent l'Equation $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18bb$, en l'ordonnant on aura $xx - ax = 2aa - 9ab + 9bb$, ou $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{9}{4}aa - 9ab + 9bb$ qui donne $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ab + 9bb}$.

On réduira aisément cette quantité si on a vû, & on ne pouvoit gueres manquer de le voir dans tout ce que nous venons de dire, que le quarré d'une quantité composé de deux termes, devoit être égal à la somme des quarrés de chacun de ces deux termes, & au double produit de ces deux termes.

Car trouvant dans la quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba$

$+ 9 b b$ les termes $\frac{2}{4} a a$ & $9 b b$ qui sont les quarrés de $\frac{1}{2} a$ & de $3 b$, & le terme $9 a b$ qui est le double produit de $\frac{1}{2} a$ & de $3 b$, on voit aisément que cette quantité $\frac{2}{4} a a - 9 b a + 9 b b$ est le quarré de $\frac{1}{2} a - 3 b$. Donc au lieu de l'expression $\sqrt{\frac{2}{4} a a - 9 b a + 9 b b}$, on peut écrire simplement $\frac{1}{2} a - 3 b$: donc la valeur de x est alors $\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a - 3 b$, c'est-à-dire ou $2 a - 3 b$, ou $- a + 3 b$, en effet l'on voit que ces valeurs résolvent également l'Equation donnée.

X X I.

Comme dans les différentes Equations du second degré qu'on peut avoir à résoudre, il arrivera souvent des cas de même nature que celui qu'on vient de traiter; il faut avoir quelque méthode sûre & générale pour reconnoître les quantités qui sont des quarrés, & pour trouver leurs racines, cette méthode est aisée à tirer des principes que nous venons d'employer dans l'exemple précédent, en voici le procédé sur un autre Exemple.

Procédé de
l'extraction
de la racine
quarrée ex-
pliqué sur
un exemple.

Soit la quantité $30 a b + 9 b b + 25 a^2$ dont on demande la racine quarrée.

J'ordonne d'abord cette quantité par rapport à une des lettres qu'elle contient, par rapport à a , par exemple, & j'écris par conséquent cette quantité, ainsi qu'on la voit dans la Table ci-jointe case 1.

Je prends ensuite la racine du premier terme $25 a^2$, laquelle est $5 a$ que je prends pour premier terme de la racine cherchée, & que

j'écris à côté de la quantité proposée $25a^2 + 30ba + 9bb$, ayant tiré auparavant une barre pour éviter la confusion. Je place alors sous la proposée le carré $25a^2$ de $5a$ en lui donnant le signe —, je tire une barre & je réduis, j'ai par ce moyen la quantité $30ba + 9bb$ que j'écris sous la barre; cela fait, je double $5a$, ce qui me donne $10a$ que j'écris au-dessus de $5a$, & je divise ensuite le premier terme $30ba$ de la quantité $30ba + 9bb$ par $10a$, & j'écris le quotient $3b$ qui est le second terme de la racine cherchée à côté de $5a$, je l'écris en même-tems à côté de $10a$, & je multiplie ce nouveau terme $3b$ de la racine par la quantité supérieure $10a + 3b$, en observant comme dans la division de changer les signes en écrivant le produit sous la quantité $30ab + 9bb$; faisant alors la réduction, & voyant que tout se détruit, je conclus que $5a + 3b$ est la racine cherchée.

XXII.

Pour fortifier les Commençans dans la méthode d'extraire les racines carrées, il ne sera pas inutile de leur faire parcourir les deux exemples suivans.

Soit d'abord proposé d'extraire la racine carrée de la quantité $4a^2 - 4ba + 4ca + bb - 2cb + cc$ ordonnée par rapport à a . Autres exemples d'extraction de racine carrée.

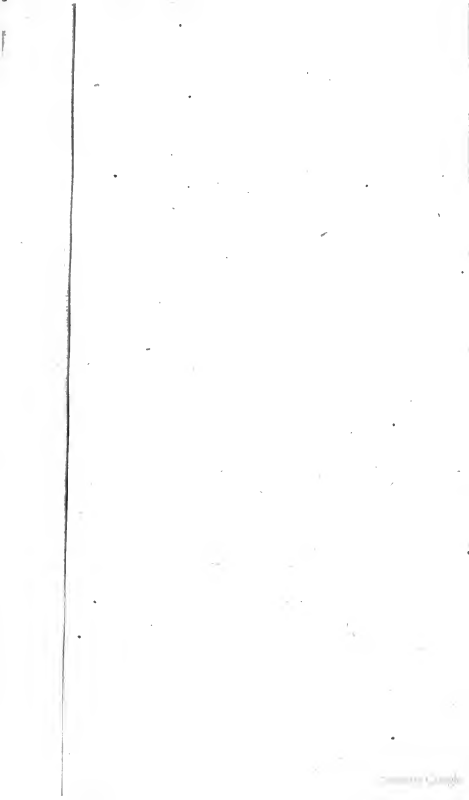
Je commence par prendre la racine de $4a^2$, laquelle est $2a$ que j'écris à côté de la proposée, (voyez la seconde case de la Table ci-jointe) je retranche ensuite le carré $4aa$,

& j'écris le reste $-4ba + 4ca + b^2 - 2cb + cc$, je double $2a$, & j'écris le double $4a$ au-dessus, je divise le terme $-4ba$ par $4a$, & j'écris le quotient $-b$, tant à côté de la racine que du diviseur $4a$, multipliant alors $-b$ par $4a - b$, j'ai en changeant les signes $+4ba - bb$ qui étant placé sous le dividende donne après la réduction $+4ca - 2cb + cc$ qui doit servir encore de dividende, je double alors la racine $2a - b$, & j'écris le double $4a - 2b$ au-dessus, je divise $+4ca$ par $4a$, & j'écris le quotient $+c$ à côté de la racine $2a - b$, & à côté du diviseur; faisant ensuite la multiplication de $+c$ par $4a - 2b + c$, & écrivant avec des signes différens le produit sous le dividende, tout se détruit, d'où je conclus que la racine est possible, & qu'elle est $2a - b + c$.

Soit ensuite proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$ ordonnée par rapport à x , en suivant les opérations qui sont écrites dans la table ci-jointe case 3, on verra facilement que la racine de cette quantité est de $2xx + 2ax + 4bb$,

XXIII,

Dans les différens exemples que nous avons donné concernant les résolutions des Equations du second degré, les Commençans n'ont gueres pû trouver de difficultés que lorsqu'il étoit question de réduire les quantités radicales en ôtant de dessous le signe,



$$\begin{array}{r} 0a + 3b \\ a + 3b \end{array}$$

Case 1.

$\begin{array}{r} -2cb + cc \\ \hline -2cb + cc \\ \hline -2cb + cc \\ +2cb - cc \end{array}$	$\begin{array}{r} 4a - 2b + c \\ 4a - b \\ 2a - b + c \end{array}$
---	--

Case 2.

$\begin{array}{r} 1x^2 + 16b^2ax + 16b^4 \\ \hline x^2 + 16b^2ax + 16b^4 \\ \hline +16b^2ax + 16b^4 \\ -16b^2ax - 16b^4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4x^2 + 4ax + 4b^2 \\ 4x^2 + 2ax \\ 2x^2 + 2ax + 4b^2 \end{array}$
--	---

o

Case 3.

les quantités quarrées qui étoient des produisans de la quantité radicale ; en effet cette opération est la plus délicate de celles qui peuvent entrer dans la résolution des Equations du second degré , il est donc important que les Commengans s'appliquent à la pratiquer facilement. Pour les aider à y parvenir , nous joindrons ici les exemples suivans,

$$\sqrt{48aabc} = 4a\sqrt{3bc}$$

$$\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}} = \frac{a - 2b}{c} \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{aahhmm} + \sqrt{4aam^3}}{ppzz} = \frac{am}{pz} \sqrt{hh + 4mp}$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}abbb} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}}$$

Exemples
de réduction
de quantités
radicales.

XXIV.

Presqu'aussiôt que les Equations du second degré ont fait connoître les quantités irrationnelles ou incommensurables (on appelle ainsi les quantités qui n'ont point de racines exactes) on a été obligé de faire sur ces mêmes quantités les mêmes opérations que sur les quantités rationnelles ou commensurables, c'est-à-dire qu'on a eu à ajouter , à Soustraire , à multiplier , à diviser des quantités , ou toutes incommensurables , ou en partie incommensurables , & en partie commensurables.

Quant à l'addition & à la soustraction des quantités radicales , elles ne renferment aucune difficulté que celles de la réduction de ces mêmes quantités à leurs plus simples expressions.

Les quantités qui n'ont point de racines exactes sont dites incommensurables ou irrationnelles.

L'addition & la soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction.

Par exemple, s'il faut ajouter $\sqrt{48abb}$ avec $b\sqrt{75a}$, je change la première de ces quantités en $4b\sqrt{3a}$, & la seconde en $5b\sqrt{3a}$, dont la somme est $9b\sqrt{3a}$.

De la même manière $\sqrt{48c^3} = \sqrt{\frac{16}{3}c^3} = \frac{4}{\sqrt{3}}c\sqrt{3c}$.

$$\sqrt{\frac{ab^3}{cc}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{a^3b - 4aabb + 4ab^3}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{ab}.$$

$$a\sqrt{\frac{a^3b}{3aa + 6ac + 3cc}} - \frac{bc\sqrt{ab}}{a+c}$$

$$= \frac{aa}{\sqrt{3}} - bc \times \frac{\sqrt{ab}}{a+c}.$$

XXV.

Multiplication des incommensurables.

A l'égard de la multiplication, si les quantités qu'on a à multiplier sont toutes deux incommensurables, il est clair qu'il n'y aura autre chose à faire qu'à multiplier les quantités qui sont sous le signe radical, & mettre le même signe radical à la tête du produit; s'il se trouve alors des réductions à faire, on les fera comme ci-dessus.

Qu'on ait à multiplier, par exemple, $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$ on écrira \sqrt{aabc} ou $a\sqrt{bc}$.

De même $\sqrt{3cd} \times \sqrt{4fgc} = \sqrt{12fgcd} = 2c\sqrt{3fgd}$.

Lorsque les quantités radicales qu'on aura à multiplier seront égales, il faudra simplement ôter le signe radical. Pour multiplier, par exemple $\sqrt{a^3cd}$ par $\sqrt{a^3cd}$, on écrit simple-

ment la quantité a^3cd sans signe radical.

Si la quantité qui multiplie un radical est rationnelle, il faut se contenter de l'écrire devant le signe avec une barre au-dessus lorsqu'elle a plusieurs termes; si on vouloit la faire entrer sous le signe radical, il faudroit la quar-
rer auparavant.

Par exemple, le produit de $a+b$
par $\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$ est $\overline{a+b} \sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$

$$\text{ou } \sqrt{\frac{ffg \times aa + 2ab + bb}{aa-bb}}$$

$$\text{ou } \sqrt{\frac{ffg \times \overline{a+b}}{a-b}} \text{ ou } \frac{f\sqrt{ag+bg}}{\sqrt{a-b}}.$$

$$2a \sqrt{\frac{aa+bb}{c}} \times -3a \sqrt{\frac{aa+bb}{d}} \\ = -\frac{6aa \times \overline{aa+bb}}{\sqrt{cd}} = -\frac{6a^4 + 6aabb}{\sqrt{cd}}$$

$$\sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b} = \sqrt{aa-bb}.$$

S'il est question de multiplier des quantités composées de plusieurs autres, ou toutes radicales, ou en partie radicales & en partie incommensurables, l'opération n'en sera pas plus difficile que les précédentes, pourvu qu'on se rappelle les règles ordinaires des multiplications des quantités complexes.

$$\text{Par exemple, } 3a\sqrt{bc} - 2b\sqrt{ac} \times 2c\sqrt{ab} \\ = 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}.$$

$$a + \sqrt{aa-bb} \times a + \sqrt{aa-bb} \\ = 2aa - bb + 2a\sqrt{aa-bb}.$$

$$a + \sqrt{aa - xx} \times a - \sqrt{aa - xx} = xx$$

XXVI.

Division des
Incommen-
surables.

Lorsqu'il s'agira de diviser deux quantités irrationnelles l'une par l'autre, on divisera les quantités qui sont sous le signe, & l'on mettra le signe devant le quotient.

S'il faut diviser une quantité irrationnelle par une rationnelle, on mettra simplement la rationnelle sous l'autre avec une barre assez longue pour qu'on puisse connoître que le signe ne porte pas dessus, si on veut au contraire, que le signe radical y porte, il faudra quarrer le diviseur.

S'il y a des quantités commensurables devant les radicaux, on les divisera à l'ordinaire, & on écrira leur quotient à côté du quotient radical : toutes ces choses s'entendront sans aucune peine par les exemples

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}; \quad \frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}; \quad \frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}} = 3a\sqrt{3c}$$

$$\frac{\sqrt{aa - xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x}; \quad \frac{\sqrt{aabb - bbxx}}{a-x} = b\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

XXVII.

Ce qu'on vient de dire concernant les Equations du second degré suffit lorsque ces Equations ne renferment qu'une inconnue; mais comme on rencontre souvent des Problèmes dans lesquels il est nécessaire d'en employer

plusieurs, il faut voir comment l'on traite ces Problèmes, nous prendrons dans cette vûe l'exemple suivant.

Trouver trois quantités en progression géométrique, dont la somme soit donnée, ainsi que la somme de leurs quarrés.*

Problème du second degré demandant plusieurs inconnues.

Soient les trois quantités cherchées x, y, z , on aura par la nature des progressions $x : y = y : z$, c'est-à-dire $yy = xz$; de plus, parceque leur somme est donnée, en nommant cette somme a , on aura $x + y + z = a$, enfin en nommant la somme de leurs quarrés bb on aura par la dernière condition du Problème $xx + yy + zz = bb$.

Pour faire usage de ces trois Equations on commencera par chasser z au moyen de la valeur $a - x - y$ tirée de l'Equation $x + y + z = a$; substituant donc cette valeur de z dans les deux autres Equations, elles se changeront en $2yy + 2xx + 2xy + aa - 2ax - 2ay = bb$, & $yy = ax - xx - xy$. Pour chasser ensuite celle qu'on voudra des deux inconnues que renferment ces deux Equations, on trouvera la valeur que cette inconnue a dans chacune de ces Equations, & on égalera les deux valeurs que l'on aura par ce moyen, or ces deux opérations

* Trois quantités dont la première est à la seconde, comme la seconde à la troisième, telles que 8, 12, 18, par exemple, sont dites en progression géométrique ou en proportion continue. On ne sçauoit entendre la théorie des proportions qu'on ne sçache en même-temps celle des progressions.

sont faciles par les principes précédens , on aura pour la premiere Equation

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

& pour la seconde

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}, \text{ il}$$

n'y a donc plus qu'à égaler ces deux valeurs, ce qui donnera l'Equation

$$-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

$$= -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy} \text{ qu'il}$$

ne s'agit plus que de résoudre.

On remarquera premierement que les termes $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$ sont communs des deux côtés, & que par conséquent l'Equation se réduit à

$$\pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}. \text{ Or en quarrant}$$

les deux membres de cette Equation, les deux radicaux disparaissent tout de suite, & l'Equation devient en réduisant $ay = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$ qui donne $y = \frac{aa - bb}{2a}$, substituant ensuite

cette valeur de y dans l'une des précédentes de x , on aura $x = \frac{1}{4}a + \frac{bb}{aa}$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{3}{16}aa + \frac{3}{8}bb - \frac{3b^4}{16aa}}$$

$$\text{ou } x = \frac{bb + aa \pm \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

& en substituant la valeur de x & celle de y dans $z = a - x - y$, on aura enfin

$$z = \frac{aa + bb \pm \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

XXVIII.

Comme on est arrivé dans cette solution à une valeur extrêmement simple pour y , après avoir eu des radicaux assez composés, on doit soupçonner qu'on pouvoit y arriver par une voye plus courte; en effet avec un peu de reflexion, on trouve facilement la méthode suivante.

Soient reprises les deux Equations

$$x^2 - ax + yx = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} - y^2 + ay \quad \& \quad x^2 + xy - ax = -yy; \text{ en retranchant ces deux Equations l'une de l'autre on a }$$

$$0 = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} + ay \text{ d'où l'on tire}$$

$$y = \frac{aa - bb}{2a} \text{ qui étant substitué dans l'une}$$

ou l'autre de ces deux Equations donne.....

$$\dots\dots\dots x^2 + \frac{aax - bbx}{2a} - ax$$

$$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa} \text{ ou } x^2 = \frac{bb + 2ax}{2a}$$

$$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa} \text{ d'où l'on tire la même}$$

valeur de x que ci-dessus.

XXIX.

Dans ce Problème on a eu des quantités qui se sont détruites par une espèce de hasard, ce qui a extrêmement simplifié les calculs; mais comme les Equations du second

Autre manière de résoudre les Equations précédentes.

dégré à plusieurs inconnues n'offrent pas tous jours de pareilles facilités, il faut sçavoir ce qu'on feroit dans des cas moins simples. Pour cela soit pris, par exemple les deux Equations $x^2 + ax - 2xy = aa + 2yy$;

$$xx - 2ax + xy = 2aa - yy.$$

Exemple d'Equation du second degré à deux inconnues plus compliqué que le précédent.

La premiere de ces Equations donne $x = -\frac{1}{2}a + y \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy}$, l'autre donne

$$x = a - \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$$

éga-
lant ensuite ces deux valeurs & réduisant on a

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy} = \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}.$$

Pour faire ensuite évanouir les radicaux de cette Equation, je commence par quarrer ses deux membres, ce qui me donne $\frac{2}{4}yy - \frac{2}{4}ay$

$$+ \frac{2}{4}aa \pm 3y - 3a\sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy}$$

$$+ \frac{1}{4}aa - ay + 3yy = 3aa - ay - \frac{3}{4}yy$$

qui contient encore un radical; afin de le faire disparaître, j'écris ainsi cette Equation

$$..... - \frac{1}{4}aa + \frac{2}{4}ay - 6yy$$

$$= \pm 3y - 3a\sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy},$$

en la réduisant & laissant la quantité radicale

$$\pm 3y - 3a\sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy}$$

seule d'un côté de l'Equation, cela fait, je quarre les

deux membres, & j'ai

$$\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{4}a^3y + \frac{105}{4}a^2yy - 54ay^3 + 36y^4$$

$$= 9yy - 18ay + 9aa \times \frac{1}{4}aa - ay + 3yy$$

$$\text{ou en réduisant } 9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4$$

c'est-là l'Equation qui résulte des deux précédentes,

Equation finale à laquelle on conduit ces Equations.

dentes, & celle qu'il faudroit résoudre pour avoir la solution du Problème qui auroit donné ces deux Equations, on voit par-là qu'il n'en est pas des Equations du second degré à plusieurs inconnues, comme de celles du premier qui ne donnent jamais une Equation finale d'un autre degré qu'elles.

X X X.

On peut sans avoir la peine de résoudre les Equations du second degré, & de chasser ensuite leurs radicaux, parvenir également à l'Equation finale. Autre manière de traiter le même exemple.

Soit repris pour le faire voir les deux Equations précédentes, & soit tirée la valeur de xx de chacune d'elles, la première fournira $xx = aa + 2yy - ax + 2xy$, la seconde $xx = 2aa - yy + 2ax - xy$, égalant ces deux valeurs on a $aa + 2yy + 2xy - ax = 2aa - yy - xy + 2ax$, d'où l'on tire $x = \frac{3yy - aa}{3a - 3y}$, qui étant substitué dans l'une

ou l'autre des deux Equations données, dans $xx - 2ax + xy = 2aa - yy$, par exemple, la change en

$$\frac{9y^4 - 6aayy + a^4}{3a - 3y} + \frac{y - 2a \times 3yy - a^2}{3a - 3y}$$

$= 2aa - yy$, qui étant réduite donne la même Equation

$$9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4.$$

XXXI.

Pour rompre les Commencans à l'usage de cette méthode qui est d'un grand usage dans l'analyse, nous allons l'appliquer aux deux Equations

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + e$$

$$x^2 + fxy + gx = hy^2 + iy + k$$

qui contiennent chacune la plus grande complication que puissent avoir les Equations du second degré à deux inconnues.

Tirant une valeur de xx de chacune de ces Equations & les égalant on aura

$$\overline{a-f} \times xy + \overline{b-g} \times x = \overline{c-h} \times y^2 + \overline{a-i} \times y + \overline{e-k}$$

laquelle, en faisant pour abrégier les calculs,

$$a - f = l; b - g = m; c - h = n;$$

$$d - i = p, e - k = q$$

$$\text{se change en } lxy + mx = ny^2 + py + q$$

$$\text{d'où je tire } x = \frac{ny^2 + py + q}{ly + m} \text{ que je substi-}$$

tue dans l'une ou dans l'autre des deux Equations données, dans la première, par exemple, j'ai

$$\frac{ny^2 + py + q}{ly + m} + \frac{ay + b \times \frac{ny^2 + py + q}{ly + m}}{ly + m}$$

$$= cy^2 + dy + e$$

$$\text{ou } \frac{ny^2 + py + q}{ly + m} + \frac{ay + b \times \frac{ny^2 + py + q}{ly + m}}{ly + m}$$

$$= cy^2 + dy + e \times ly + m$$

En faisant alors les opérations indiquées, réduisant & ordonnant, il vient enfin

$$y^4 + \frac{bln + amn + alp + 2np - 2mlc - l^2d}{aln + nn - l^2e} y$$

$$+ \frac{bmn + qal + pbl + pam + p^2 + 2nq - m^2c - 2mld - el^2}{aln + nn - l^2c} y^2$$

$$+ \frac{blq + amq + bmq + 2pq - m^2d - 2mel}{aln + nn - l^2c} y$$

$$= \frac{m^2e - q^2 - bmq}{aln + nn - l^2c}, \text{ Equation du quatrième}$$

dégré résultant des deux Equations du second dégré les plus générales.

XXXII.

Si on avoit des Equations telles que $xx y + ax y = a b b$ & $xx y y + c c y x = a^4$, ces Equations ne seroient point compt  es parmi celles du second dégré à cause que le produit inconnu de x^2 par y est de trois dimensions & que celui de x^2 par y est de quatre dimensions, mais la méthode précédente serviroit avec la même facilité à chasser les x de ces deux Equations. Pour le faire voir, supposons que a représente toutes les quantités composées d' y & de connues, à quelque dégré qu'elles montent, qui peuvent multiplier x^2 dans l'une des Equations données; β toutes celles qui multiplient x dans la même Equation; γ les quantités entierement connues qui sont de l'autre côté de la même Equation, c'est-à-dire que cette premiere Equation sera $a x^2 + \beta x = \gamma$. Que la seconde soit de même $\delta x^2 + \epsilon x = \phi$.

On tirera de la premiere $x^2 = \frac{\gamma - \beta x}{a}$, &

I ij

de la seconde $x^2 = \frac{\varphi - \varepsilon x}{\delta}$ lesquelles étant
 égalées donnent $\gamma \delta - \beta \delta x = \varphi \alpha - \varepsilon \alpha x$ d'où
 l'on tire $x = \frac{\varphi \alpha - \gamma \delta}{\varepsilon \alpha - \beta \delta}$, 'qui étant substitué dans
 l'Equation $\omega x^2 + \beta x = \gamma$, donne
 $\alpha \times \frac{\varphi \alpha - \gamma \delta}{\varepsilon \alpha - \beta \delta} + \beta \times \frac{\varphi \alpha - \gamma \delta}{\varepsilon \alpha - \beta \delta} = \gamma \times \frac{\varepsilon \alpha - \beta \delta}{\varepsilon \alpha - \beta \delta}$ dans laquelle mettant pour
 $\omega, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ leurs valeurs composées de
 γ , & de connues l'on aura l'Equation cherchée.

XXXIII.

Ce qu'il fau-
 droit faire
 pour arriver
 à l'Equation
 finale lorsque
 x seroit au
 troisième dé-
 gré.

Si les x ainsi que les γ montoient chacune
 à des degrés plus haut que le second, on
 pourroit encore dans ce cas employer la mé-
 thode précédente, supposons, par exemple,
 qu'on ait les deux Equations

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = j, \text{ \& } \varepsilon x^3 + \varphi x^2 + \chi x = n$$

dans lesquelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \chi, n$ repré-
 sentent toutes sortes de quantités composées
 d' γ & de connues, on commencera par pren-
 dre x^3 dans chacune de ces Equations, & on
 égalera ses deux valeurs, ce qui donnera

$$\frac{\delta - \beta x^2 - \gamma x}{\alpha} = \frac{n - \varphi x^2 - \chi x}{\varepsilon} \text{ ou}$$

$$\delta \varepsilon - \varepsilon \beta x^2 - \gamma \varepsilon x = n \alpha - \varphi \alpha x^2 - \chi \alpha x$$

$$\text{ou } \varphi \alpha - \varepsilon \beta \times x^2 = \gamma \varepsilon - \chi \alpha \times x + n \alpha - \delta \varepsilon$$

dans laquelle x n'est qu'au second degré.
 Multipliant ensuite cette Equation par ωx ,
 ainsi que l'Equation $\omega x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$

par $\phi \alpha - \epsilon \beta$, j'ai les deux Equations

$$\begin{aligned} \phi \alpha^2 - \alpha \epsilon \beta \times x^3 &= \gamma \epsilon \alpha - \chi \alpha^2 \times x^2 + \eta \epsilon \alpha - \delta \epsilon \alpha \times x \\ &\& \gamma \alpha^2 - \gamma \epsilon \alpha \times x^3 + \beta \phi \alpha - \beta^2 \epsilon \times x^2 + \gamma \phi \alpha - \gamma \epsilon \beta \times x \\ &= \delta \times \phi \alpha - \epsilon \beta. \end{aligned}$$

Desquelles je chasse x^3 comme des deux premières Equations, ce qui me donne

$$\begin{aligned} \alpha \times \gamma \epsilon - \chi \alpha + \beta \times \phi \alpha - \beta \epsilon \times x^2 \\ + \alpha \times \eta \epsilon - \delta \epsilon + \gamma \times \phi \alpha - \epsilon \beta \times x \end{aligned}$$

$= \delta \times \phi \alpha - \epsilon \beta$. Dans laquelle x ne monte non plus qu'au second degré, voilà donc le Problème réduit présentement au cas qu'on a résolu dans l'article précédent, c'est à dire à celui où l'on a deux Equations dans lesquelles l'inconnue x ne monte qu'au second degré; il est donc inutile d'achever ici le calcul, puisqu'il n'auroit de difficulté que celle de sa longueur.

XXXIV.

Si l'inconnue qu'on veut chasser des deux Equations proposées, s'y trouvoit élevée à un degré plus haut que le troisième, on voit bien que par une opération semblable à la précédente on les changeroit d'abord en deux autres Equations d'un degré moindre, & que par ce moyen on parviendroit toujours à chasser entièrement l'inconnue.

Ce seroit la même chose si x montoit à des degrés plus élevés.

XXXV.

Si au lieu de deux inconnues on en avoit trois

Et s'il y a-
voit plus de
deux incon-
nues on par-
viendrait de
même à l'E-
quation fi-
nale.

élevées chacune à un degré quelconque , il est clair que pourvû qu'on eut trois Equations, on parviendrait par la même méthode à une Equation finale qui ne contiendrait que celle que l'on voudrait de ces trois inconnues ; car oubliant d'abord une de ces trois inconnues, deux des trois Equations suffiroient pour arriver à une seule qui ne renfermeroit que l'inconnue oubliée, & que celle que l'on voudrait des deux autres inconnues. Faisant ensuite la même opération avec l'une des deux Equations employée dans la première opération & la troisième Equation, on parviendrait à une autre Equation, entre les deux mêmes inconnues, c'est-à-dire que le Problème seroit réduit à celui où l'on a deux Equations à deux inconnues, d'où l'on parviendrait enfin à une seule inconnue renfermée dans une Equation.

Si on avoit quatre Equations & quatre inconnues, on réduiroit de même la question à trois Equations & trois inconnues, puis à deux Equations & deux inconnues, puis enfin à une seule Equation & à une inconnue ; Il en seroit de même pour un plus grand nombre d'Equations & d'inconnues.





ELEMENS D'ALGEBRE.

TROISIE' ME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les Equations de tous les degrés, avec la méthode de tirer de ces Equations, celles du premier & du second degré qu'elles peuvent renfermer.

Sil les Equations plus élevées que le second degré ont présenté de grandes difficultés, lorsqu'on a entrepris de les résoudre dans tous les cas, il a été du moins assez facile de faire sur ces Equations des réflexions générales qui pouvoient en faire connoître la nature, & servir

à les résoudre dans beaucoup de cas particuliers.

Ayant vû, par exemple que les Equations du premier degré n'avoient qu'une racine, que celles du second en avoient deux, on a été porté à croire que celles du troisiéme en avoient trois & ainsi de suite, & pour s'assurer de cette vérité, ou plutôt pour comprendre comment une Equation pouvoit avoir autant de racines qu'elle a de degrés, on a cherché l'inverse du Problème qu'on s'étoit proposé d'abord, c'est à-dire qu'au lieu de chercher les racines d'une Equation, on a cherché quelle seroit l'Equation qui auroit pour ses racines des quantités données, problème infiniment plus facile que le premier.

I.

Maniere de
former une
Equation
par le moyen
de ses raci-
nes.

Qu'on demande, par exemple quelle est l'Equation dans laquelle x pourra avoir également pour valeur ou 2, ou 3, ou 5; on n'a qu'à former ces trois Equations simples

$x - 2 = 0$; $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$, multipliant ensuite les deux premières l'une par l'autre, & leur produit par la troisiéme, on a $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, dans laquelle on peut supposer également $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$. On voit aisément que chacune de ces valeurs étant substituée à la place de x dans l'Equation $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, doit la résoudre, ou ce qui revient au même, en doit faire évanouir tous les termes, car cette Equation pouvant s'écrire ainsi

$(x - 2) \times (x - 3) \times (x - 5) = 0$, chacune de

ses parties étant égalée à zero doit, à cause qu'elle multiplie toutes les autres, les faire évanouir en même-tems; or la supposition de $x=2$, ou $=3$, ou $=5$ rend toujours zero l'une des trois parties $x-2$, $x-3$, $x-5$.

II.

Par cette méthode on voit comment une Equation peut avoir autant de racines que de degrés; pour traiter la question plus en général, soient a, b, c, d, e , les racines d'une Equation, & partant $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, $x-e=0$, les Equations simples qui composent l'Equation dont les racines sont ces quantités. En multipliant toutes ces Equations les unes par les autres, on aura

$$\begin{array}{rcl} x^5 - ax^4 + abx^3 - abcx^2 + abcdx - abcde = 0 \\ \begin{array}{l} -b + ac - abd + abce \\ -c + ad - ace + abde \\ -d + ae - acd + acde \\ -e + bc - ace + bcde \\ \quad + bd - ade \\ \quad + be - bcd \\ \quad + cd - bce \\ \quad + ce - bde \\ \quad + de - cde \end{array} \end{array}$$

pour l'Equation dans laquelle x peut avoir à la fois les valeurs données a, b, c, d, e .

III.

Il est aisé de tirer de cette Equation, ces remarques générales sur les Equations de tous les degrés

1^o Que le premier terme n'est autre chose

Une Equation a autant de racines que de degrés.

Propriété des Equations de tous les degrés.

que l'inconnue élevée à la puissance exprimée par le nombre des racines sans coefficient.

Que le second terme contient l'inconnue élevée à une puissance de moins avec un coefficient égal à la somme des racines.

Que dans le troisième, l'inconnue se trouve élevée à deux puissances de moins, & a pour coefficient la somme de tous les produits deux à deux qu'on peut faire de toutes les racines.

Que dans le quatrième on aura de même l'inconnue élevée à trois puissances de moins avec un coefficient qui exprime la somme des produits de toutes les racines prises trois à trois.

Il sera ainsi des autres termes jusqu'au dernier qui n'aura aucune puissance de x , mais qui sera le produit de toutes les racines les unes par les autres. Ces remarques ont servi de base en beaucoup de rencontres, soit pour trouver les racines des Equations proposées, soit du moins pour connoître plusieurs de leurs propriétés.

IV.

Dans une Equation sans second terme la somme des racines positives est égale à celle des négatives.

On a tiré, par exemple, de ces remarques qu'une Equation comme $x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 3 = 0$ manquant de second terme, doit avoir nécessairement des racines positives & des négatives, de plus que la somme des unes doit être égale à la somme des autres, car sans cette condition elles ne se seroient pas détruites pour faire évanouir le second terme. Ainsi dans une Equation du troisième degré, où le second terme manquera, il y aura toujours ou une racine négative égale aux deux positi-

ves, ou une racine positive égale aux deux négatives.

V.

On a tiré encore des mêmes remarques que lorsqu'une Equation n'aura pas de dernier terme, il faudra qu'il y ait au moins une racine égale à zero; ce qu'on auroit pû reconnoître aussi en faisant attention qu'une Equation telle que $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$ qui manque de terme connu peut toujours se diviser par $x = 0$.

Une Equation qui n'a point de terme connu a au moins une racine égale à zero.

V I.

Lorsqu'on voudra retrouver dans une Equation les propriétés qu'on vient d'énoncer, on voit bien qu'il faudra que tous les termes de cette Equation soient du même côté, qu'ils soient ordonnés par rapport à l'inconnue, & que cette inconnue n'ait d'autre coefficient que l'unité au premier terme. De plus, que si quelque une des puissances de x manque dans l'Equation, il faudra toujours prendre pour quantité des autres termes ceux qu'ils auroient si ces puissances ne manquoient pas; par exemple dans l'Equation $x^4 - 3x^3 + 4x - 5 = 0$ le terme $3x^3$ n'est que le troisième, parce que le second manque; & le terme $4x$ est le cinquième, parce que le quatrième manque. Si on vouloit donc appliquer les remarques précédentes à une telle Equation, on diroit que la somme de ses cinq racines est nulle, c'est-à-dire qu'elle a nécessairement des racines négatives & des racines positives, & que la somme des premières est égale à la somme des au-

Conditions qu'il faut observer dans une Equation pour y trouver les propriétés précédentes.

tres. On diroit encore que la somme des produits de toutes les racines deux à deux est égale à -3 ; que la somme de tous les produits trois à trois est 0 , que la somme de tous les produits quatre à quatre est $+4$, qu'enfin le produit de toutes les racines est -5 .

V I I.

Méthode
pour avoir
les racines
commensu-
rables d'une
Equation.

De la propriété qu'a le dernier terme d'une Equation d'être égal au produit de toutes les racines, on peut tirer une méthode d'avoir toutes les racines qui sont commensurables dans une Equation, car elles doivent toutes se trouver en tentant la division de l'Equation par x plus ou moins chacun des diviseurs du dernier terme.

Par exemple, qu'on ait l'Equation $x^3 - 5xx + 7x - 3 = 0$, les diviseurs du terme -3 , ne pouvant être que $-1, -3, +1, +3$; je tente la division par $x-1, x-3, x+1, x+3$; elle réussit par $x-1$ & par $x-3$, & je vois que l'Equation auroit pû s'écrire ainsi

$x-1 \times x-1 \times x-3 = 0$, qui m'apprend que l'Equation proposée a trois racines, dont l'une est $+3$ & les autres toutes deux égales sont chacune $+1$.

Lorsqu'une Equation ne pourra pas se diviser par aucune Equation simple composée de $x +$ ou $-$ quelqu'un des diviseurs du dernier terme, on sera sûr que cette Equation n'aura aucune racine commensurable.

V I I I.

Il se présente contre cette méthode de trou-

ver les racines commensurables, une difficulté qui, au premier coup d'œil, paroît assez considérable, c'est que si quelque racine de cette Equation étoit une fraction, on ne sçauroit pas comment la trouver parmi les diviseurs du dernier terme, parce qu'en admettant des diviseurs fractionnaires dans un nombre, on en peut trouver à l'infini. Mais il est aisé de répondre à cette difficulté en faisant remarquer que tous les coefficients d'une Equation étant des nombres entiers, il est impossible que l'inconnue ait pour valeur une fraction. Je crois que ceux qui possèdent un peu l'Arithmétique des fractions reconnoîtroient sans secours la vérité de cette proposition; mais pour leur faciliter les moyens de s'en assurer, prenons pour exemple une Equation comme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, dans laquelle a , b , c , sont supposés des nombres entiers. Il est évident que x étant une fraction, x^3 , x^2 , en seront aussi, & que jamais la fraction qui exprime x^3 ne pourra se réduire à une qui ait le même dénominateur que x^2 ou son multiple ax^2 . A plus forte raison la même fraction ne pourra pas non plus se réduire au même dénominateur que x ou son multiple bx , donc $x^3 + ax^2 + bx$ ne pourra jamais faire une fraction plus simple que x^3 qui est irréductible. Donc x ne peut jamais être une fraction dans de telles Equations.

Dans une Equation dont tous les coefficients sont des entiers, l'inconnue ne sçauroit être une fraction.

I X.

Lorsqu'on aura une Equation dont les coefficients seront des fractions, on ne pourra pas en la laissant avec ses fractions trouver par la

méthode précédente les racines commensurables qu'elle pourroit avoir; mais on pourra toujours par une transformation assez simple changer le Problème en un autre, où l'Equation à résoudre n'aura plus de fractions, sans donner de coefficient au premier terme.

^r Transformation par laquelle on fait évannouir les fractions d'une Equation quelconque.

Soit, par exemple l'Equation

$x^3 + \frac{a}{b}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{e}{f} = 0$ (on verra aisément qu'une d'un degré plus élevé n'auroit pas plus de difficulté) en faisant l'inconnue x égale à une autre inconnue y divisée par quelque nombre indéterminé m , je change l'Equation

en une nouvelle $\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{bm^2} + \frac{cy}{dm} + \frac{e}{f} = 0$

ou $y^3 + \frac{am}{b}y^2 + \frac{cm^2}{d}y + \frac{em^3}{f} = 0$,

dans laquelle je vois que si m est divisible à la fois par b , par d , & par f ; $\frac{am}{b}$, $\frac{cm^2}{d}$ & $\frac{em^3}{f}$ seront des nombres entiers. Or le Problème est réduit par-là à quelque chose de bien aisé, car le pis aller est de prendre pour m le produit des nombres b , d , f , & si ces nombres ne sont pas premiers* entr'eux, on trouvera aisément un nombre plus petit que leur produit qui sera divisible par tous les trois.

* On appelle en Arithmétique nombres premiers ceux qui n'ont point de diviseurs, tels que 5, 11, 31, &c. & on dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont aucun commun diviseur, tels sont 21 & 16, 18 & 35.

X.

L'Equation étant changée en une autre sans fraction, on cherchera les racines commensurables de cette dernière par la méthode précédente, & si elle n'en a pas, on sera sur que la première n'en avoit pas non plus, puisque x étant commensurable ne pourra jamais donner une quantité incommensurable en le divisant par le nombre m qui est commensurable aussi.

Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux Equations fractionnaires.

X I.

La méthode précédente a cet inconvénient considérable que lorsqu'il arrive que le dernier terme a beaucoup de diviseurs, les calculs qu'il faut faire pour tenter toutes les divisions que cette méthode prescrit sont si longs, qu'on l'abandonneroit malgré l'avantage infini de s'étendre généralement aux Equations de tous les degrés dont une ou plusieurs racines sont commensurables. C'est ce qui a engagé les plus habiles Analystes à perfectionner cette méthode en trouvant des moyens plus faciles que la division pour reconnoître les diviseurs qui ne doivent pas réussir. Voici comment on s'y est pris.

Inconvénient de la méthode précédente.

X I I.

On a d'abord remarqué que si on faisoit dans la racine $x + a$ d'une Equation quelconque, ou ce qui revient au même dans le diviseur $x + a$ d'une quantité quelconque, x égal à un nombre donné, le nombre dans lequel se changeoit alors la racine devoit être un diviseur de la quantité proposée, dans laquelle on au-

Réflexions qui ont servi à perfectionner cette méthode.

roit fait x égal au même nombre : c'est-à-dire, par exemple que si on a la quantité $x^3 - 2x - 21$ dont on sçait que $x - 3$ est un diviseur, il arrivera qu'en faisant $x = 5$ le nombre 94 que devient $x^3 - 2x - 21$ par cette supposition est nécessairement divisible par le nombre 2 que devient $x - 3$ par la même supposition.

En partant de-là on a supposé dans la quantité dont on cherchoit un diviseur, x successivement égal à plusieurs nombres, tels par exemple que $+1, 0, -1$; on a commencé par ces suppositions, parce qu'elles donnent les substitutions les plus faciles. Ensuite on a cherché tous les diviseurs des nombres dans lesquels la quantité proposée se change par ces substitutions; & on a fait ces remarques qui se présentent naturellement après la première.

1°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = +1$ dans la quantité, on devoit trouver le nombre $1 + a$, puisque $x + a$ étoit le diviseur cherché.

2°. Que parmi tous les diviseurs venus par la supposition de $x = 0$, qui ne sont autre chose que les diviseurs du dernier terme de la quantité proposée, devoit être le nombre a .

3°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = -1$, devoit être le nombre $-1 + a$.

X I I I.

Principe
fondamental
pour trouver
les racines
commensu-
rables.

Or comme les nombres $1 + a, a, -1 + a$ sont nécessairement tels que le premier surpasse le second d'une unité, & que le second surpasse le troisième

troisième d'une unité aussi, il étoit aisé de tirer de là ce principe, que de tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x=0$, aucun ne pouvoit être le nombre demandé a , s'il ne le trouvoit en même-tems surpassé de l'unité par quelqu'un des diviseurs du nombre venu par la supposition de $x=1$, & s'il ne surpassoit en même tems d'une unité quelqu'un des diviseurs du nombre qu'a donné la supposition de $x=-1$. On voit bien qu'un tel principe doit faire éviter beaucoup de divisions inutiles dans la recherche des racines commensurables.

Si on trouve plusieurs nombres, parmi les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x=0$, qui ayent les conditions qu'on vient de remarquer, on fera ensuite $x=2$, & on verra si parmi les diviseurs des nombres qui viennent alors, on trouve des nombres qui surpassent d'une unité ceux qu'a donné la supposition de $x=1$, & ainsi de suite.

Au reste, on voit bien que l'examen qu'on fait de tous ces diviseurs doit être double, c'est-à-dire que chacun d'eux doit être pris aussi-bien en $-$ qu'en $+$.

XIV.

Pour éclaircir cette méthode & pour en faciliter l'usage, nous allons en donner quelques exemples en faisant voir l'ordre qu'il faut garder dans le calcul pour ne s'y point tromper, & pour abréger, autant qu'il est possible, la peine du Calculateur.

K

Application
de la métho-
de précéden-
te à un exem-
ple.

Soit l'Equation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$ dont il s'agit de trouver les racines commenfurables, ou ce qui revient au même, soit la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ dont on demande les diviseurs d'une dimension.

Je commence par écrire (voyez la Table cy-jointe Case 1) l'une sous l'autre les suppositions 1, 0, — 1 que je veux faire pour x ; j'écris ensuite à côté de chacun de ces nombres les nombres — 8, + 6, + 16 ou simplement 8, 6, 16 (à cause que les signes sont indifférens pour les diviseurs) dans lesquels se change successivement la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par ces suppositions, & je les sépare des premiers nombres par une barre verticale. J'écris dans une troisième colonne les nombres 1, 2, 4, 8; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 4, 8, 16 qui sont les diviseurs des nombres précédens; les quatre premiers à côté de 8 dont ils sont les diviseurs, les quatre seconds à côté de 6, & les cinq derniers à côté de 16.

Cela posé, pour trouver parmi les diviseurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$, celui qu'il faut ajouter ou retrancher à x pour avoir le diviseur cherché, ou plutôt pour exclure de tous ces diviseurs ceux qui n'ont pas les conditions requises; je commence par remarquer que 1 qui est le premier de ces diviseurs ne sçauroit être admis, soit qu'on le prenne en +, soit qu'on le prenne en —, car si on le prend en +, c'est-à-dire si on regarde $x + 1$ comme le diviseur cherché, 2 seroit ce que deviendroit ce diviseur par la supposition de $x = + 1$,

& o ce qu'il deviendrait par la supposition de $x = -1$, & par conséquent il faudroit trouver à la fois 2 dans les nombres de la premiere bande, & o dans ceux de la troisième, or la seconde de ces conditions n'est pas remplie. Quant à ce que -1 ne convient pas non plus, c'est-à-dire que $x = -1$ n'est pas le diviseur cherché, cela se tire de ce que ce diviseur devenant o par la supposition de $x = +1$ & -2 par la supposition de $x = -1$, il faudroit par conséquent trouver o dans les nombres de la premiere bande, & le nombre 2 dans ceux de la seconde. Or il n'y a que la seconde de ces deux conditions qui ait lieu. Je vois ensuite que le diviseur 2 est aussi dans le cas d'être rejeté, parce que si on le prend en $+$, c'est-à-dire si on regarde $x + 2$ comme le diviseur cherché, on auroit $+$ 3 par la supposition de $x = 1$, & $+$ 1 par la supposition de $x = -1$, ce qui demanderoit qu'on trouvât les nombres 3 dans la premiere bande, & 1 dans la troisième; or la premiere de ces deux conditions ne se trouve pas remplie. Et si l'on prenoit 2 en $-$, c'est-à-dire qu'on voulût que $x - 2$ fut le diviseur, on auroit alors -1 & -3 pour les suppositions de $x = +1$ & de $x = -1$, ce qui demanderoit de trouver à la fois 1 dans la premiere bande, & 3 dans la troisième, conditions dont il n'y a que la premiere qui ait lieu.

Ayant exclu 1 & 2, je prens le diviseur 3, & je vois qu'en le prenant en $+$, c'est-à-dire en regardant $x + 3$ comme le diviseur cherché,

il faudra trouver $+4$ par la supposition de $x = +1$, & $+2$ par la supposition de $x = -1$. Or je trouve effectivement 4 dans la première bande, & 2 dans la troisième. Donc $+3$ a les conditions requises, je l'écris alors à la seconde bande, c'est-à-dire vis-à-vis le nombre dont il est diviseur, & j'écris en même-tems les nombres $+4$ & $+2$ dans les bandes supérieures & inférieures; non que ces nombres soient à joindre à x pour servir de diviseurs à la quantité proposée, mais parce que n'ayant pas encore achevé l'examen des diviseurs, il se pourroit trouver encore d'autres nombres que $+3$ qui auroient les conditions requises; & qu'il faudroit alors faire de nouvelles suppositions pour reconnoître entre ces nombres ceux qu'il faudroit encore exclure. J'examine maintenant si 3 pris en $-$ ne pourroit pas réussir aussi-bien qu'en $+$, c'est-à-dire si $x = -3$ ne pourroit pas avoir les mêmes conditions pour être diviseur de la proposée, il faudroit pour cela trouver -2 & -4 par les suppositions de $x = +1$ & de $x = -1$, or ces nombres se trouvent effectivement; donc jusqu'à présent $x = -3$ a aussi-bien les conditions nécessaires pour être diviseur que $x = +3$ j'écris par conséquent dans une cinquième colonne verticale $-2, -3, -4$.

Je passe enfin à l'examen de 6 & je vois que si je le prends en $+$, il faudroit trouver $+7$ & $+5$ dans les bandes supérieures & inférieures, ce qui n'arrive pas, & que si je le prends en $-$ je devrois avoir -5 & -7 dans les mêmes

bandes, ce qui ne se trouve pas non plus. Je conclus donc qu'il n'y a que $x - 3$ & $x + 3$ qui puissent être des diviseurs commensurables & d'une dimension de la proposée.

Pour sçavoir si l'on est autant fondé à tenter la division par $x - 3$ que par $x + 3$; je remarque que si on faisoit une quatrième bande en supposant $x = -2$ on devroit trouver -5 pour le quatrième terme de la colonne $-2, -3, -4$; & $+1$ pour le quatrième terme de la colonne $+4, +3, +2$, car il est clair que le diviseur $x - 3$ deviendrait -5 par la supposition de $x = -2$, & que le diviseur $x + 3$ deviendront $+1$ par la même supposition. Mais en faisant $x = -2$ dans la proposée $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$, elle devient 16 qui n'est pas divisible par 5 & qui l'est par 1 . Donc $x - 3$ ne sçauroit être un diviseur de cette quantité, donc s'il y en a un, il ne peut être que $x + 3$, ou ce qui revient au même si $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ a une racine comensurable, elle ne peut être que -3 . Pour sçavoir si elle l'a effectivement, je divise $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par $x + 3$, ce qui réussit & donne pour quotient exact $xx - 5x + 2$.

XV.

Pour que l'uniformité servit à la clarté dans cet exemple, j'ai examiné parmi les diviseurs $1, 2, 3, 6$ du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$ le nombre 1 comme les autres, mais on peut toujours se dispenser de faire aucun examen pour ce nombre, parce que s'il avoit à réussir, soit en $+$, soit en $-$, on l'auroit

appris déjà en substituant $+1$ & -1 à la place de x dans l'Equation donnée.

Dans des nombres aussi simples que 8, 6, 16 il étoit aisé de ne pas oublier aucun de leurs diviseurs, parce que ces nombres en ont peu. Mais lorsque l'on a des nombres qui ont beaucoup de diviseurs, il faut les chercher avec un certain ordre pour les avoir tous. Un seul exemple suffira pour faire voir comment cette opération doit se faire.

XVI.

Maniere
d'avoir tous
les diviseurs
d'un nom-
bre,

Soit proposé de chercher tous les diviseurs du nombre 120. Je commence par tracer une barre verticale (voyez la Case 2 Table suivante) à gauche de ce nombre, puis je mets à gauche de cette barre à la hauteur de 120, l'unité comme étant son premier diviseur. J'essaye ensuite de diviser 120 par 2, comme la division réussit j'écris 2, & je le mets à gauche de la barre à la même hauteur que 60 quotient de la division que je mets à droite de la même barre.

J'essaye encore la division par 2 qui réussit, & donne 30 pour quotient, je mets alors le nouveau diviseur 2 sous le premier; & 30 sous 60. Je multiplie en même-tems le nouveau diviseur 2 par celui d'en haut 2, & je mets le produit 4 à gauche du second 2, comme étant un nouveau diviseur du nombre proposé 120. La raison de cette multiplication est que si 120 est divisible par 2 & sa moitié par 2, il doit l'être nécessairement par 4.

Comme 30 peut se diviser par 2 j'écris en-

core 2 à gauche de la barre & à la quatrième ligne, & le quotient 15 à droite à la même ligne. Je multiplie en même-tems le nouveau diviseur 2 par 4, ce qui me donne 8 pour un nouveau diviseur du nombre proposé. Je ne multiplie pas ce nouveau 2 par les premiers, parce qu'il m'en viendrait 4 qui est déjà écrit.

15 ne pouvant pas se diviser par 2 j'essaye de le diviser par 3, ce qui me réussit & me donne 5 pour quotient que j'écris à droite dans la cinquième ligne aussi-bien que le diviseur 3 que j'écris à gauche; je multiplie ensuite 3 par 2, par 4 & par 8 que je trouve dans les bandes supérieures, & j'écris à gauche du 3 les produits 6, 12, 24, qui sont, comme il est évident, des nouveaux diviseurs du nombre proposé.

5 n'ayant plus d'autre diviseur que lui-même, je l'écris à gauche de la barre dans la cinquième ligne, & je mets en même-tems le produit de ce nombre par tous les diviseurs précédens 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, & j'ai 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120 que j'écris dans la même ligne à gauche de 5.

Cela fait, tous les nombres qui sont à gauche de la barre, à compter depuis 1 jusqu'à 120 sont tous les diviseurs de 120. Il en seroit ainsi des autres nombres dont on chercheroit tous les diviseurs.

XVII.

Soit proposé présentement de chercher les racines commensurables de l'Equation

$$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120 = 0.$$

Autre exemple de la méthode de trouver les racines commensurables.

Ayant écrit dans une premiere colonne verticale 1, 0, — 1 (Table suivante Case 3) pour les valeurs à donner luccessivement à x ; & dans une autre colonne verticale les nombres 165, 120, 221 qu'on trouve par la substitution de ces valeurs dans la quantité $x^4 - 12x^3 + 5x^2 - 61x^2 + 22x - 120$, je place dans une troisieme colonne les diviseurs de ces trois nombres, ce qui me donne les trois bandes

1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165;

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60, 120;

1, 13, 17, 221

que je place chacune vis-à-vis du nombre qui l'a produite cela fait parmi les diviseurs de 120, J'examine en premier lieu si le nombre 2 a les conditions requises, & je vois qu'en le prenant en + il s'accorde avec les nombres 3 & 1 pris en haut & en bas. J'écris donc dans la quatrième colonne verticale +3, +2, +1.

Je vois ensuite que le même nombre pris en — ne réussit pas, parce qu'il faudroit alors —3 en bas, ce qui ne le trouve pas.

Parcourant ensuite de la même maniere tous les autres diviseurs de 120, je trouve encore le nombre 12 qui étant pris en — a les conditions requises, pourvû qu'on prenne en — les nombres 11 & 13 qui sont au-dessus & au dessous. J'écris donc dans une cinquième colonne verticale les trois nombres — 11, — 12, — 13.

Pour sçavoir présentement à laquelle des deux dernieres colonnes je dois m'arrêter, ou

plûtôt, par laquelle des deux quantités $x + 2$ ou $x - 12$ je dois tenter la division, je remarque que si c'étoit la première, il faudroit trouver zero en substituant -2 pour x dans l'Equation, ce qui n'arrive pas; donc il n'y a que la division par $x - 12$ à tenter, je la tente & elle réussit en me donnant pour quotient $x^2 + 5x^2 - x + 10$. Ainsi $+12$ est une des valeurs de x dans l'Equation donnée & la seule communurable.

XVIII.

Soit enfin $x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$. Ayant écrit (Case 4 Table suivante) dans une première colonne verticale les valeurs $1, 0, -1$ à donner à x ; dans une seconde les nombres $30, 36, 40$, dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions, & dans une troisième tous les diviseurs $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ du nombre 30 , les diviseurs $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$ du nombre 36 , les diviseurs $1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40$ du nombre 40 ; je trouve parmi tous ces diviseurs quatre colonnes à écrire qui renferment les conditions requises, la première, $+3, +2, +1$, la seconde, $-2, -3, -4$, la troisième, $-3, -4, -5$, la quatrième, $+10, +9, +8$.

Troisième application de la méthode de trouver les racines communes commensurables.

Pour décider alors entre ces quatre colonnes, je commence par faire $x=2$, & j'écris 2 au-dessus de 1 dans la première colonne, j'écris ensuite dans la seconde colonne 74 , nombre dans lequel la quantité proposée se change par la supposition de $x=2$. Cela fait,

je vois sans me donner la peine de chercher les diviseurs de ce nombre que les deux colonnes $+3, +2, +1, \& +10, +9, +8$, sont à rejeter, car si la première avoit lieu, il faudroit trouver $+4$ parmi les diviseurs de 74, ce qui n'arrive pas, & si c'étoit la seconde, il faudroit trouver $+11$ parmi les mêmes diviseurs, ce qui n'arrive pas non plus.

Je vois au contraire, que les nombres -1 & -2 que demandent les colonnes $-2, -3, -4$, & $-3, -4, -5$ sont des diviseurs de 74, j'écris donc les nombres -1 & -2 au-dessus de -2 & de -3 dans la seconde & la troisième colonne, & je cherche ensuite à exclure encore une de ces deux colonnes $-1, -2, -3, -4, \& -2, -3, -4, -5$, ce qui devient bien facile, puisque si la première étoit à conserver, il faudroit trouver 0 par la supposition de $x=3$, ce qui n'arrive pas; au lieu que -1 qui, par la colonne $-2, -3, -4, -5$ doit être un diviseur du nombre donné par la supposition de $x=3$, ne peut pas manquer de l'être. Donc il n'y a de colonne à essayer que $-1, -2, -3, -4, -5$, c'est à-dire qu'il n'y a de diviseur à tenter que $x-4$. J'essaye en effet la division de la quantité proposée par $x-4$, ce qui réussit & donne pour quotient $x^2 + 3x - 5x - 9$. Ainsi $+4$ est une des deux valeurs de x dans l'Equation proposée & la seule commensurable.

X I X.

Après avoir vû comment on pouvoit tirer des Equations d'un degré quelconque, les

Equations commensurables du premier qui en étoient les racines, il étoit naturel de chercher aussi à en tirer les Equations du second degré qu'elles pouvoient renfermer : on devoit s'en promettre une aussi grande utilité, la solution des Equations du second degré étant aussi complète que celle du premier.

Voici la méthode qu'on a imaginée pour y parvenir. Que $xx + bx + c = 0$ représente l'Equation du second degré qui peut être un des produisans d'une Equation donnée, ou ce qui revient au même que $xx + bx + c$, soit le diviseur cherché d'une quantité donnée; en faisant $x = 0$ dans ce diviseur, il est clair qu'il se réduira au nombre c , & que ce nombre sera un des diviseurs du dernier terme de la quantité donnée.

Méthode pour trouver les Equations du second degré commensurables dans une Equation donnée.

Si on fait ensuite $x = +1$ dans le diviseur $x^2 + bx + c$, il se changera en $1 + b + c$ qui sera un des diviseurs du nombre que l'on a en faisant de même dans la proposée $x = 1$. Donc si on cherche tous les diviseurs de ce nombre & qu'après les avoir pris tant en $+$ qu'en $-$, on en retranche l'unité ce sera parmi tous les nombres, tant positifs que négatifs, que l'on aura par cette opération que devra se trouver le nombre égal à $b + c$.

Si on fait ensuite $x = -1$ tant dans la quantité proposée, que dans le diviseur $xx + bx + c$ qui devient alors $1 - b + c$, on voit qu'en cherchant tous les diviseurs du nombre que devient la quantité par cette supposition, & re-

tranchant l'unité de tous ces diviseurs, pris tant en $-$ qu'en $+$, on aura parmi tous les nombres que ce calcul donnera celui qui exprime $-b+c$.

Or comme c est moyen arithmétique entre $b+c$ & $-b+c$, il s'ensuit que parmi les trois suites de nombres qu'on aura pour représenter $b+c$, c , $-b+c$, il ne faudra s'arrêter qu'à ceux qui seront en progression arithmétique. Lorsqu'on aura trouvé trois nombres en progression arithmétique, il est clair que celui qui répondra à la supposition de $x=0$ sera celui qu'il faudra prendre pour c , & comme celui qui répondra à la supposition de $x=1$ représentera $b+c$, en retranchant le premier du second, on aura b . Substituant ensuite ces deux nombres à la place de b & de c dans $x^2 + bx + c$, on aura un diviseur à tenter pour la quantité donnée, & le seul à essayer si on n'a trouvé qu'une progression arithmétique parmi toutes les suites de nombres qu'ont donné les diviseurs de la quantité où l'on a fait successivement $x=1$, 0 , -1 . Si on a trouvé plusieurs progressions arithmétiques, on se déterminera entre ces progressions à peu près comme dans le cas des diviseurs simples, en faisant de nouvelles suppositions pour x , comme -2 , -3 , ou $+2$, $+3$, &c.

Car qu'on suppose, par exemple $x=-2$, $x=-3$, &c. dans la quantité proposée, il est clair que tous les diviseurs, tant positifs que négatifs du nombre que l'on aura alors représenteront la quantité $4-2b+c$, $9-3b+c$, &c.

A

B

C

K4

I

x

C

lication
métho-
écéden-

...the ...

$$\begin{aligned}
 & \text{Theorem 1. Let } \mathcal{H} \text{ be a Hilbert space, } T \text{ a bounded linear operator on } \mathcal{H}, \text{ and } \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ an orthonormal basis for } \mathcal{H}. \text{ Then} \\
 & \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

[illegible]

[illegible]

100

1. The first step is to identify the problem or question that needs to be answered. This involves understanding the context and the specific requirements of the task.

100

[illegible]

10. The following table shows the number of people who attended the 2004 Summer Olympics in Athens, Greece, and the 2008 Summer Olympics in Beijing, China. The number of people who attended the 2004 Summer Olympics in Athens, Greece, is 10,500,000. The number of people who attended the 2008 Summer Olympics in Beijing, China, is 11,000,000. The number of people who attended the 2004 Summer Olympics in Athens, Greece, is 10,500,000. The number of people who attended the 2008 Summer Olympics in Beijing, China, is 11,000,000.

$$d = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right)$$

[illegible]

4

[illegible]

que devient $x^2 + bx + c$ lorsque $x = -2$ ou $x = -3$, &c. & que par conséquent tous ces mêmes diviseurs dont on aura retranché 4, 9, &c. représenteront $-2b + c$, $-3b + c$, &c. Or $-2b + c$, $-3b + c$, &c. étant d'autres termes de la progression arithmétique $b + c, c$, $-b + c$, on n'aura donc plus qu'à chercher parmi les progressions arithmétiques trouvées précédemment celle qui se conserve par ces nouvelles valeurs de x , & s'en servir comme on vient de l'expliquer pour déterminer les nombres b & c .

XX.

Soit par exemple la quantité $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 8x - 36x + 21$, dont on cherche un diviseur de deux dimensions. Application de la méthode précédente.

Je commence par écrire dans une colonne verticale (Table suivante Case 5) les valeurs 1, 0, -1 que je veux donner à x . J'écris ensuite dans une nouvelle colonne verticale les nombres 1, 21, 65, dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions.

J'écris de même dans une troisième colonne, à côté du premier nombre, son unique diviseur 1; à côté de 21, les diviseurs 1, 3, 7, 21; & à côté de 65 ses diviseurs 1, 5, 13, 65.

Cela fait, j'écris dans une quatrième colonne les nombres 1, 0, 1 quarrés de 1, 0, -1 écrits dans la première colonne & valeurs de xx , par conséquent, dans les mêmes suppositions de 1, 0, -1. Enfin je forme une cinquième colonne par ces conditions,

1°. Que la premiere bande -2 , 0 se forme en retranchant 1 de 1 pris en $-$ & de 1 pris en $+$.

2°. Que la seconde bande soit composée des nombres -21 , -7 , -3 , -1 , $+1$, $+7$, $+21$, les mêmes que les diviseurs qui sont à côté, mais écrits deux fois, l'une pour le signe $-$, l'autre pour le signe $+$.

3°. Que les nombres de la troisième bande soient -66 , -14 , -6 , -2 , 0, $+4$, $+12$, $+64$, dont les premiers -66 , -14 , -6 , -2 soient trouvés en retranchant 1 des nombres 65, 13, 5, 1 pris en $-$, & les autres 0, $+4$, $+12$, $+64$ en retranchant 1 des mêmes nombres 1, 5, 13, 65 pris en $+$.

Pour déterminer ensuite les progressions arithmétiques qui sont dans ces trois suites de nombres, je commence par prendre dans la premiere bande le nombre -2 pour le premier terme d'une progression, & je prends successivement pour seconds tous ceux de la seconde bande; je cherche en même-tems les troisièmes termes que ces premiers donneroient, & j'examine quels sont ceux de ces troisièmes qui se trouvent dans la troisième bande; or -2 & -21 doivent donner pour troisième terme -40 qui n'est point dans la troisième bande, je rejette donc 21, je prends alors -7 pour second terme, & comme il devoit donner -12 pour troisième terme, & que -12 n'est pas dans la troisième bande, je rejette encore -7 , & de même -3 , parce que ce dernier devoit donner -4 qui ne se trouve pas non plus.

A l'égard de -1 comme il donne 0 pour troisième, & que 0 se trouve dans la troisième bande, j'écris dans la sixième colonne la progression $-2, -1, 0$. De même $+1$ pris pour second donnant $+4$ qui se trouve encore, j'écris la seconde progression $-2, +1, +4$. Et comme $+7$ & $+21$ devoient donner chacun un troisième terme qui n'est pas dans la troisième bande, je les rejette. Les progressions qui peuvent commencer par 2 étant déterminées, je passe à celles dont le premier terme seroit 0, & pour les trouver, je prends ainsi que j'ai fait pour 2 tous les nombres de la seconde bande l'un après l'autre.

Je vois d'abord que -21 devrait donner pour troisième terme -42 qui n'est pas dans la troisième bande. Je vois ensuite que -7 donne -14 qui se trouve, ainsi j'écris encore la progression 0, $-7, -14$. De même -3 & -1 donnant -6 & -2 qui se trouvent aussi, j'écris les progressions 0, $-3, -6$, & 0, $-1, -2$. A l'égard des nombres $+1, +7, +21$, ils ne donnent aucun troisième terme qui se trouve, ainsi je les rejette.

Pour voir présentement lesquelles de ces progressions il faut encore rejeter, je fais $x = -2$, & j'écris -2 dans la première colonne; en observant de mettre en même-temps, 1^o dans la seconde colonne 125 que donne la quantité proposée par cette valeur de x . 2^o. Dans la troisième les nombres 1, 5, 25,

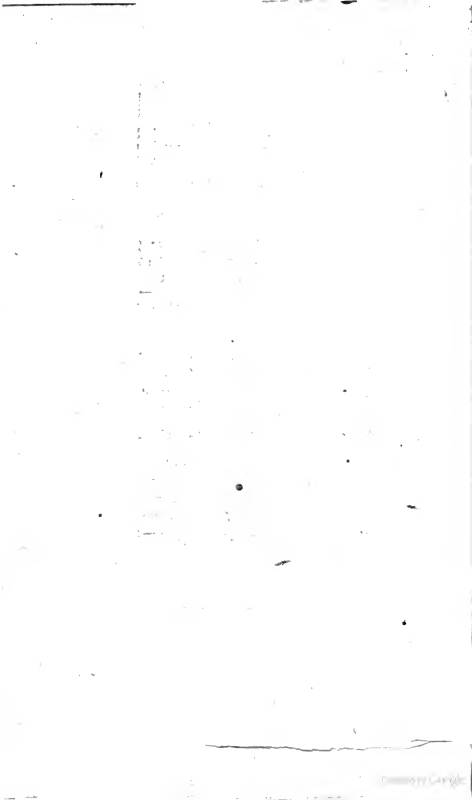
125 diviseurs de 125. 3°. Dans la quatrième colonne le nombre 4 quarré de -2 & valeur de xx dans cette supposition. 4°. Dans la cinquième colonne les nombres -129 , -29 , -9 , -5 que l'on a en retranchant 4 des nombres 125, 25, 5, 1 pris en $-$, & les nombres -3 , $+1$, $+21$, $+121$ que l'on a en retranchant 4 des mêmes nombres 1, 5, 25, 125 pris en $+$.

Par ce moyen, je vois que les deux progressions -2 , $+1$, $+4$, & 0 , -7 , -14 sont à rejeter, parce qu'elles devroient donner pour quatrième terme $+7$ & -21 qui ne se trouvent pas dans la quatrième bande. Mais les trois progressions -2 , -1 , 0 ; 0 , -3 , -6 ; 0 , -1 , -2 devant donner pour quatrième termes, $+1$, -9 , -3 qui se trouvent dans cette quatrième bande, j'ai besoin d'une nouvelle supposition pour exclure au moins une de ces trois progressions.

Je fais donc $x = -3$, ce qui me donne 147 pour le nombre dans lequel se change la quantité proposée par cette supposition. J'écris donc 147 dans la seconde colonne, & à côté, dans la troisième, les diviseurs 1, 3, 7, 21, 49, 147, je mets de même dans la quatrième colonne 9 quarré de -3 ou valeur de xx dans la nouvelle supposition, enfin j'écris dans la cinquième colonne les nombres -156 , -58 , -30 , -16 , -12 , -10 , -8 , -6 , -2 , $+12$, $+40$, $+138$, que l'on a en retranchant 9 des nombres 1, 3, 7, 21, 49, 147 pris en $-$ & en $+$.

Par-là

Autre appli-
cation de la
méthode
précédente.



Par-là je trouve que les progressions -2 , -1 , 0 , $+1$ & 0 , -1 , -2 , -3 doivent être rejetées, & qu'au contraire il faut conserver la progression 0 , -3 , -6 , -9 , car les deux cinquièmes termes des premières progressions doivent être $+2$ & -4 qui ne se trouvent pas dans la cinquième bande, au lieu que le cinquième terme de la progression 0 , -3 , -6 , -9 est -12 qui s'y trouve.

Après avoir réduit toutes les progressions à la seule 0 , -3 , -6 , &c. je prends dans cette progression le nombre -3 qui, dans la sixième colonne, répond à la supposition de $x=0$, pour exprimer le terme c du diviseur cherché $xx+bx+c$. Je prends ensuite, toujours dans la sixième colonne, 0 qui répond à la supposition de $x=1$, & qui suivant les principes précédens doit être $b+c$, ainsi retranchant c ou -3 de 0 ou $b+c$, j'ai $+3$ pour b , & partant le diviseur cherché x^2+bx+c est $xx+3x-3$, s'il y en a un de deux dimensions.

Pour sçavoir ce qui en est, je divise la quantité proposée $x^4+3x^3+2x^2+8x^2-36x+21$ par $xx+3x-3$, & je trouve qu'en effet la division est exacte, & donne pour quotient x^3+5x-7 .

X X I.

Soit présentement la quantité $x^4+6x^3+11x^2+10x+5$, je commence par écrire (Table ci-jointe Case. 1) dans une première colonne verticale les valeurs $2, 1, 0, -1$,

Autre application de la méthode précédente.

— 2 que je veux donner à x . J'écris ensuite dans la seconde colonne verticale les nombres 133, 33, 5, 1, 3 dans lesquels la quantité se change par ces suppositions.

Dans la troisième j'écris vis-à-vis de ces nombres tous leurs diviseurs. Dans la quatrième les valeurs 4, 1, 0, 1, 4 de xx dans les suppositions faites pour x à la première colonne.

Enfin dans la cinquième colonne j'écris pour la première bande les nombres — 137, — 23, — 11, — 5, — 3, + 3, + 15, + 129 trouvés en retranchant 4 des nombres 133, 19, 7, 1 pris d'abord en — & ensuite en +. De même dans la seconde bande les nombres — 34, — 12, — 4, — 2, 0, + 2, + 10, + 32, produits en retranchant 1 des nombres 33, 11, 3, 1 pris d'abord en — puis en +, & ainsi des autres bandes. Tous ces nombres écrits, je commence par prendre dans la cinquième bande de la cinquième colonne, le premier nombre — 7 pour servir de premier terme d'une progression, & prenant en même-tems — 2 dans la quatrième bande pour servir de second, je vois que le troisième devoit être + 3, & qu'il ne se trouve pas dans la troisième bande, ainsi je passe à 0 qui, en prenant toujours — 7 pour premier terme, donneroit + 7 pour troisième terme, & comme + 7 n'est pas non plus dans la troisième, je conclus qu'il n'y a point dans les nombres de la cinquième colonne de progression qui puisse commencer par — 7.

Je prends donc — 5 pour premier terme,

& je vois qu'en lui donnant -2 pour second, le troisième seroit $+1$ qui se trouve bien dans la troisième bande, mais qui donne pour quatrième terme $+4$, qui n'est pas dans la seconde bande; ainsi je laisse -2 & prends 0 pour second terme, ce qui me donne alors $+5$, $+10$, $+15$, pour troisième, quatrième & cinquième termes, & comme tous ces nombres se trouvent dans la troisième, seconde & première bandes, j'écris dans la sixième colonne les nombres 15 , 10 , 5 , 0 , -5 .

Prenant ensuite -3 pour premier terme, je vois que ni -2 ni 0 ne peuvent lui servir de seconds termes, parce que le premier donneroit la progression -3 , -2 , -1 , 0 , $+1$ dont le dernier terme n'est point dans la première bande; & que le second donneroit la progression -3 , 0 , $+3$, &c. qui manque dès le troisième terme $+3$ qui ne se trouve point dans la troisième bande.

Il ne me reste plus qu'à prendre -1 pour premier terme, je lui donne d'abord -2 pour second qui ne réussit pas, mais lui donnant ensuite 0 , j'ai pour troisième, quatrième, cinquième termes les nombres $+1$, $+2$, $+3$ qui sont dans la troisième, seconde & première bande; j'écris donc dans la sixième colonne les nombres $+3$, $+2$, $+1$, 0 , -1 .

Cela fait, je ne cherche point à donner de nouvelles valeurs à x pour exclure une de ces deux progressions, parce que la quantité donnée étant de quatre dimensions, doit ou n'avoir aucun diviseur de deux dimensions; ou

en avoir deux à la fois, ce qui se tire de ce qu'aussi-tôt qu'on aura trouvé un diviseur de deux dimensions à une quantité qui a quatre dimensions, le quotient qui est toujours un diviseur en même-tems, aura aussi deux dimensions.

Suivant cette réflexion, je prends indifféremment l'une ou l'autre des deux progressions précédentes, la première, par exemple, dans laquelle 5 étant ce qui répond à la supposition de $x = 0$, & 10 ce qui répond à la supposition de $x = 1$, j'ai $c = 5$ & $b + c = 10$, c'est-à-dire, $b = 5$. D'où le diviseur que donne cette progression est $xx + 5x + 5$. Je divise donc la-quantité proposée par $xx + 5x + 5$, & je vois qu'elle réussit en donnant pour quotient $xx + x + 1$ qui est le diviseur qu'on trouveroit par l'autre progression.

XXII.

Lorsqu'il sera question de trouver les diviseurs d'une Equation telle que $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20 = 0$, dont le premier terme aura un coefficient qui n'aura pas pû s'en aller en divisant toute l'Equation par ce coefficient, on pourra se servir des principes précédens sans être obligé de changer cette Equation en une autre qui n'ait point de coefficient au premier terme comme on le pourroit faire par la méthode de l'art. 1x.

Méthode
pour trouver
les diviseurs
d'une dimen-

Pour le faire voir examinons d'abord ce qui regarde les diviseurs d'une dimension. Que $mx + a$ représente celui qui doit diviser une

quantité quelconque donnée. Il est clair que si on fait x successivement égal à 2, 1, 0, — 1, — 2, &c, ce diviseur deviendra dans tous ces cas $2m + a, m + a, a, -m + a, -2m + a$, &c. qui sont des quantités en progression arithmétique, dans lesquelles il est aisé de remarquer,

tion, lorsque l' x doit avoir un coefficient.

1°. Que la différence m de tous les termes est le coefficient de x dans le diviseur.

2°. Que cette même différence m est un diviseur du coefficient du premier terme de la quantité proposée.

3°. Que le terme a répondant à la supposition de $x = 0$ est la partie délivrée d' x du diviseur.

4°. Que les mêmes quantités en progression arithmétique seront des diviseurs de la quantité donnée, dans laquelle on aura fait successivement x égal à 2, 1, 0, — 1, — 2, &c.

Cela posé, lorsqu'on aura à chercher les diviseurs d'une dimension d'une quantité quelconque donnée, on suivra d'abord le même procédé que ci-dessus pour les trois premières colonnes; on cherchera ensuite parmi tous ces nombres quelque progression, dont la différence soit un diviseur du coefficient du premier terme de la quantité proposée. Enfin, pour employer cette progression, on substituera dans $mx + a$, à la place de a le terme de la progression qui répondra à la supposition de $x = 0$, & à la place de m le nombre que l'on aura en retranchant un terme quelconque de la progression, de celui qui est au-dessus.

Application
de cette mé-
thode à un
exemple.

Supposons, par exemple, que l'on cherche les diviseurs de la quantité $6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20$.

Je range à l'ordinaire dans la première colonne les suppositions 2, 1, 0, —1, —2, à faire pour x . Dans la seconde les nombres 30, 7, 20, 3, 34, que devient successivement la quantité donnée par ces suppositions, & enfin dans la troisième tous les diviseurs de ces nombres.

Cela fait, afin de découvrir parmi tous les nombres de la troisième colonne quelque progression qui serve à reconnoître le diviseur cherché, Je commence par examiner le premier nombre 1 de la première bande; & je vois d'abord que si on lui donne pour second le premier nombre 1 de la seconde bande, la progression 1, 1, 1, &c. qui en vient ne peut pas être admise, puisqu'elle ne sçauroit représenter le diviseur cherché $mx + a$ qui doit varier nécessairement par les différentes valeurs de x . Je vois de même que 7 ne sçauroit être pris pour second, car le troisième terme que produiroit cette supposition seroit 13 qui ne se trouve pas dans la troisième bande.

Prenant ensuite 1 en —, je vois que 1 de la seconde ne lui sçauroit servir de second terme, parce que le troisième seroit 3 qui n'est pas dans la troisième bande. A l'égard de 7, il est inutile de chercher si le troisième terme qu'il donneroit se trouve dans la troisième bande, puisque la différence de —1 à 7 est 8

qui n'est pas un diviseur du coefficient du premier terme de la quantité proposée ; donc 1 soit qu'on le prenne en $+$ ou qu'on le prenne en $-$ est à rejeter.

Parcourant de la même manière tous les autres nombres de la première bande, je ne trouve que 10 qui puisse avoir les conditions convenables. Lui donnant 7 pour second terme, il donne la progression $10, 7, 4, 1, -2$ dont la différence est 3 diviseur du coefficient de $6x^3$.

Ayant donc écrit cette progression dans la quatrième colonne, je prend le terme $+4$ qui répond à la supposition de $x = 0$ pour exprimer la partie a du diviseur cherché, & retranchant le même terme $+4$ du terme supérieur $+7$ qui représente $m + a$, j'ai $+3$ pour exprimer m , c'est-à-dire que le diviseur cherché, s'il doit y en avoir un, ne peut être que $3x + 4$. Je tente donc la division par cette quantité, elle réussit, & me donne pour quotient $2x^3 - 3x^2 - 3x + 5$.

XXIV.

Examinons présentement les cas où les diviseurs doivent avoir deux dimensions. Soit pris $mx^2 + bx + c$ pour représenter le diviseur cherché d'une quantité donnée, il est clair comme ci-dessus que le dernier terme c sera un diviseur du dernier terme de la quantité donnée, & que m sera un diviseur du coefficient de la plus haute puissance de x dans la quantité donnée.

Méthode pour trouver les diviseurs des deux dimensions, lorsque l' x doit avoir un coefficient.

Choissant donc d'abord pour représenter m un des diviseurs du coefficient du premier terme de la quantité donnée, & faisant la mê-

me opération que dans l'art. XIX. à cela près ; qu'au lieu de retrancher les quarrés 16, 9, 4, &c. on retranche le produit de ces mêmes quarrés par le nombre qu'on aura choisi pour m , on trouvera de même b & c .

Si le diviseur que l'on a ainsi en mettant dans $m x^2 + b x + c$, pour m le nombre choisi, & pour b, c ceux qui auront été déterminés d'après ce choix, ne réussit pas, on prendra un autre des diviseurs du coefficient du premier terme de la quantité donnée pour représenter m , & l'on achevera le calcul de la même manière. Si après avoir essayé tous les diviseurs du coefficient du premier terme, il arrivoit qu'on ne trouvât pas de diviseur par cette méthode, on seroit sûr que la quantité proposée n'en devoit point avoir.

X X V.

Application
de cette mé-
thode à un
Exemple.

Soit pris, pour faire une application de cette méthode la quantité $4 x^5 + 16 x^4 - 22 x^3 - 14 x^2 - 56 x + 77$ dont on demande un diviseur de deux dimensions. Ayant d'abord placé à l'ordinaire (Table suivante Case 3) dans la première colonne les nombres 2, 1, 0, —1, —2, &c. auxquels on égale successivement x ; dans la seconde les nombres 117, 5, 77, 153, 437 que devient successivement la quantité proposée par ces valeurs de x ; dans la troisième tous les diviseurs des nombres de la seconde : je commence par chercher suivant les règles de l'art. XIX. s'il y a quelque diviseur de deux dimensions, dont le premier terme ait

l'unité pour coefficient ; mais n'en trouvant point , Je suppose que m , c'est-à-dire le coefficient du premier terme du diviseur , soit 2 qui est un des diviseurs du coefficient 4 du premier terme de la quantité donnée.

Je place alors dans la quatrième colonne , au lieu des quarrés des nombres de la première , le produit de ces mêmes quarrés par 2 valeur supposée de m , c'est-à-dire que j'écris dans la quatrième colonne les nombres 8, 2, 0, 2, 8. Je retranche ensuite ces nombres de tous ceux de la troisième colonne pris en $-$ & en $+$, ce qui me donne pour la première bande de la cinquième colonne $-125, -47, -21, -17, -11, -9, -7, -5, +1, +5, +31, +109$; pour la seconde bande $-7, -3$, &c.

Tous ces nombres écrits , je cherche toujours comme ci-devant des progressions arithmétiques parmi tous ces termes , & je ne trouve que la progression $+5, -3, -11, -19, -27$ que j'écris dans la sixième colonne ; cela fait , je prends -11 répondant à zero pour exprimer le nombre c , & retranchant ce nombre de -3 qui est au-dessus, j'ai le reste $+8$ pour exprimer b . Le diviseur qui résulte donc de la supposition de $m=2$ est $2x^2 + 8x - 11$, j'essaye alors la division qui réussit en donnant pour quotient $2x^3 - 7$, & sans prendre la peine de faire le calcul que demanderoit la supposition de $m=4$, je vois qu'il ne doit pas réussir, parce qu'il faudroit pour cela que le quotient $2x^3 - 7$ pût se

décomposer, ce qui est impossible. Ainsi la quantité proposée n'a pas d'autre diviseur de deux dimensions que $2x^2 + 8x - 11$.

X X V I.

Toute quantité de moins de six dimensions, & qui a des diviseurs, en doit avoir d'au-dessous de trois dimensions.

Lorsqu'on cherchera les diviseurs d'une quantité qui ne passera pas le cinquième degré, on pourra toujours les trouver par les méthodes précédentes; car aussi-tôt qu'on se sera assuré par ces méthodes que cette quantité n'aura point de diviseur, ni d'une, ni de deux dimensions, on sera sûr aussi qu'elle n'en aura pas de trois.

X X V I I.

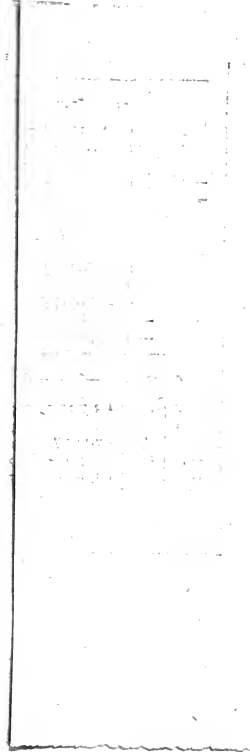
Si la quantité a six ou plus de dimensions, elle pourroit n'avoir de diviseurs que de trois ou de plus de dimensions.

Mais si la quantité monte à six & à plus de dimensions, elle pourroit n'être décomposable qu'en des quantités de plus de deux dimensions. La méthode qu'il faudroit suivre pour trouver ces diviseurs est fondée à peu près sur les mêmes principes que les précédens, je ne m'arrête point à l'expliquer à cause de la longueur des calculs.

X X V I I I.

Tout ce que nous venons de dire concernant les diviseurs commensurables ne regarde que les Equations numériques, cependant les Equations littérales pouvant aussi avoir des diviseurs commensurables, il faut voir ce que l'on doit faire pour les trouver.

Supposons d'abord que l'Equation ne renferme qu'une lettre connue avec x , & que cette Equation, soit ce qu'on appelle homogène, c'est-à-dire que tous ses termes montent à la même dimension, telle que l'Equation



1.

$$\begin{array}{r|rr}
 129 & +15 & +3 \\
 & +10 & +2 \\
 & +5 & +1 \\
 & 0 & 0 \\
 & -5 & -1
 \end{array}$$

se 2.

$$\begin{array}{l|l}
 2, -7, -5, +1, +5, +31, +109 & +5 \\
 +11, +77 & -3 \\
 -1, +1, +7, +15, +49, +151 & -11 \\
 +11, +15, +429 & -19 \\
 & -27
 \end{array}$$

$x^3 - ax^2 - 10a^2x + 6a^3$, par exemple, on n'aura qu'à substituer l'unité à la place de la lettre connue a de cette Equation, & chercher ses diviseurs de la même manière que ci-dessus. Ces diviseurs étant trouvés, s'ils sont d'une dimension, on remettra la lettre a à côté du nombre qui sert de second terme. Si le diviseur a deux dimensions, on placera a après le coefficient du second terme, & aa après le nombre qui sert de troisième terme.

Soit, par exemple, la quantité $x^3 + 4ax^2 - 17a^2x - 12a^3$, après avoir fait $a = 1$, & trouvé que la quantité $x^3 + 4x^2 - 17x - 12$, qui vient par cette opération, a pour diviseur $x - 3$, je conclus que $x - 3a$ est un diviseur de la quantité proposée.

Qu'on ait ensuite $2x^4 + 5ax^3 - 3a^2x^2 - 8a^3x - 20a^4x + 12a^5$. En supposant $a = 1$, on aura $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 8x - 20x + 12$ qui donne pour diviseur de deux dimensions $2x^2 + 5x - 3$. Mettant alors dans ce diviseur a à côté de 5 , & aa à côté de 3 , il vient $2x^2 + 5ax - 3aa$ pour le diviseur de deux dimensions de $2x^4 + 5ax^3 - 3a^2x^2 - 8a^3x - 20a^4x + 12a^5$.

XXIX.

Dans une Equation homogène & renfermant trois lettres, on pourroit, en suivant les méthodes précédentes, parvenir encore à trouver ses diviseurs, tant simples que composées de deux dimensions; mais à l'aide de quelques observations de calcul qui se présentent assez

naturellement , on peut réussir d'une façon un peu plus commode.

Méthode
pour trouver
tous les divi-
seurs à deux
lettres dans
une quantité
qui en a trois

Supposons d'abord que la quantité donnée qui renferme trois lettres , a , b , x dut avoir pour diviseur une quantité qui n'en renfermât que deux , que les lettres x , & a , par exemple : puisque ce diviseur quel qu'il soit pourra sans contenir de b , diviser la quantité donnée ou b entre , il faut que la valeur de b soit indifférente à la division , & que cette division puisse se faire de même lorsque b sera zero , donc si on fait $b=0$ dans la quantité donnée , il faudra que la quantité donnée par cette supposition ait pour commun diviseur avec la quantité entière , le diviseur cherché. La question est donc en ce cas renfermée dans une autre traitée dans la premiere Partie, art. LXXIII. où l'on a enseigné à trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités données : de sorte que par ce qu'on a enseigné dans cet article , on trouvera le diviseur cherché de quelque dimension qu'il soit , pourvu qu'il n'ait que deux lettres.

X X X.

Exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode , soit pris d'abord la quantité , $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + abbx + a^4 + aabb$, dont on cherche un diviseur où les seules lettres a , x entrent.

En faisant $b=0$ il vient $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4$ dont le plus grand commun diviseur avec la quantité entière , ou , ce qui

revient au même, avec le reste $abbx + aabb$, est $x + a$, qui est donc nécessairement un diviseur de la quantité donnée, & le plus grand qu'elle puisse avoir qui ne contienne pas de b .

XXXI.

Soit $x^4 - 4ax^3 + 6aax^2 - abx^3 + abbx^2 + 2aabbx^2 - 4a^3x^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$; en faisant $b = 0$ dans cette quantité on a $x^4 - 4ax^3 + 6aax^2 - 4a^3x^2$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec la quantité proposée, ou ce qui revient au même, avec le reste $abx^3 + abbx^2 + 2aabbx^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur des quantités $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$ & $x^3 + bx^2 + 2ax^2 - 2abx - 2aax + 2aab$.

Autre exemple.

Or s'il y a un diviseur commun entre ces deux quantités qui ne contienne pas de b , il sera aussi commun aux deux parties $x^3 + 2ax^2 - 2a^2x$ & $bx^2 - 2abx + 2a^2b$ de la dernière de ces deux quantités; mais le diviseur commun de ces deux parties ne peut être que $xx - 2ax + 2a^2$, j'examine donc s'il divise aussi $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$ & comme il le divise en effet, je conclus qu'il est le diviseur cherché de la quantité proposée.

XXXII.

Supposons présentement que la quantité proposée composée de trois lettres dont on cherche les diviseurs n'en ait aucun composé seu-

Méthode pour trouver les diviseurs de trois let-

res & d'une
dimension.

lement de deux lettres, ou bien que si elle en renferme, on ait commencé par les trouver, & les mettre à part; pour trouver alors les diviseurs de trois lettres & d'une dimension qu'elle peut avoir, je commence par représenter ce diviseur par $mx + na + pb$; m, n, p étant supposées désigner des nombres. Je remarque ensuite que si on fait successivement, a, x, b égaux à zero dans ce diviseur, on a les trois quantités $mx + pb$, $na + pb$, $mx + na$ telles que les deux termes que chacune d'elles renferme se trouvent répétés dans les deux autres quantités; $mx + pb$ par exemple donné par la supposition de $a = 0$, est composé de mx qui se trouve dans $mx + na$ donné par la supposition de $b = 0$, & de pb qui se trouve dans $na + pb$ donné par la supposition de $x = 0$. Je vois en même-tems que la somme de ces trois quantités $mx + na$, $mx + pb$, $na + pb$, est le double du diviseur entier $mx + na + pb$.

Or comme ces trois quantités sont nécessairement des diviseurs de celles que l'on auroit en faisant les mêmes suppositions de a, x, b égaux à zero, dans la quantité proposée; on tire de-là, que pour trouver les diviseurs de cette quantité qui ne montent qu'à une dimension, & contiennent trois lettres, il faut commencer par écrire séparément les trois quantités, dans lesquelles la proposée se change par la supposition de a, x, b égaux à zero; écrire ensuite à côté de chacune de ces nouvelles quantités tous les diviseurs d'une di-

menſion & à deux lettres. Cela fait ; il faut choiſir trois diviſeurs parmi ces trois claſſes de diviſeurs à deux lettres , en obſervant les conditions dont nous venons de parler , que les deux termes dont chacun de ces diviſeurs ſera compoſé ſe retrouvent dans les deux autres diviſeurs. Ces trois diviſeurs étant ainſi trouvés , la moitié de leur ſomme ſera le diviſeur de la quantité propoſée ſi elle en a un.

Si pour trouver dans un de ces trois diviſeurs de deux lettres les deux termes qui doivent être la répétition de ceux qui ſont dans les deux autres , il falloit en changer les deux ſignes à la fois , on voit bien que ce changement ſeroit permis , puisſqu'en général une quantité qui en diviſe une autre la diviſera encore , ſi on en change tous les ſignes.

XXXIII.

Pour montrer l'application de cette méthode , ſoit propoſée la quantité $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10abb - 6b^3$. Ayant d'abord écrit (voyez la Table ci-jointe Caſe 1) dans une colonne verticale les trois quantités $10ab^2 - 6b^3$; $2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3$; $2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$ dans leſquelles cette quantité ſe change par la ſuppoſition de x, a, b égaux à zero ; j'écris dans une ſeconde colonne verticale vis-à-vis de chacune de ces trois quantités leurs diviſeurs à deux lettres & d'une ſeule dimension. La première fournit $5a - 3b$ & $10 - 6b$; la ſeconde ſeulement $2x - 3b$, & la troiſième

Application de la méthode précédente à un exemple.

$2x + 5a$. Cela fait, je vois tout de suite que si on prend des deux diviseurs, $5a - 3b$, $10a - 6b$, le premier $5a - 3b$; il aura, avec les deux diviseurs $2x - 3b$, $2x + 5a$, la propriété requise, car ce premier diviseur $5a - 3b$ contient $5a$ qui est répété dans le diviseur $2x + 5a$, & $-3b$ qui est répété dans $2x - 3b$; de même $2x - 3b$ contient $2x$ qui est répété dans $2x + 5a$, & $-3b$ qui est répété dans $5a - 3b$; & enfin $2x + 5a$ est composé de $2x$ & de $+5a$, qui sont répétés dans les deux autres $5a - 3b$, $2x - 3b$.

J'ajoute donc suivant la règle précédente ces trois diviseurs, & j'ai $4x - 6b + 10a$, dont la moitié $2x - 3b + 5a$ est le diviseur cherché. En effet, si on tente la division, on trouve pour quotient $x^2 + ax + 2bb$.

XXXIV.

Autre
exemple.

Soit proposé présentement de trouver les diviseurs d'une dimension & à trois lettres de la quantité $8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3$. Ayant fait successivement x , a , b égaux à zéro dans cette quantité, j'ai les trois quantités $9a^2b^2 + 15ab^3$, $8x^4 - 10bx^3$, $8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$ que j'écris (voyez la Case seconde de la Table ci-jointe) l'une sous l'autre dans une colonne verticale. J'écris dans une autre colonne verticale à côté de chacune de ces quantités leurs diviseurs d'une dimension & à deux lettres; ceux de la première sont $3a + 5b$ & $9a + 15b$; ceux de la seconde

$4x$

$4x - 5b$, $8x - 10b$; & ceux de la troisième $4x - 3a$ & $2x + a$.

Il n'est pas difficile ensuite de trouver que les trois diviseurs $3a + 5b$, $4x - 5b$, & $4x - 3a$ ont les propriétés requises pourvu qu'on prenne le premier $3a + 5b$ en changeant ses signes, c'est-à-dire en l'écrivant ainsi $-3a - 5b$; je mets donc à part ces trois diviseurs dans la quatrième colonne, je les ajoute, & prends la moitié de la somme, ce qui me donne $4x - 3a - 5b$ pour le seul diviseur cherché, supposé qu'il y en ait un. Je tente la division, & je trouve pour quotient exact $2x + ax^2 - 3ab^2$.

XXXV.

Dans ces deux exemples nous n'avons point écrit les diviseurs d'une lettre que donnoient chacune des trois quantités de la première colonne, parce que ces diviseurs n'auroient jamais pu être les quantités dans lesquelles le diviseur à trois lettres se change par la supposition de x, a, b égaux à zero, & que nous avons supposé qu'on s'étoit assuré par la méthode de l'article xxix. que la quantité proposée n'avoit pas de diviseur à deux lettres. Mais si on avoit des quantités qui eussent de ces sortes de diviseurs, & qu'on ne voulut pas se servir de la méthode de l'art. xxix. on pourroit les trouver en même-tems que ceux à trois lettres par la même méthode que nous venons d'expliquer, pourvu que ces diviseurs n'eussent non plus qu'une dimension.

Troisième
exemple où
l'on trouve
les diviseurs
à deux let-
tres en mê-
me-tems que
ceux à trois.

Soit par exemple la quantité $16x^3 + 16bxx$
 $- 48axx + 35a^2x - 6abx - 6a^3 + 3a^2b$.

Ayant écrit dans une premiere colonne (voyez
la Case 3 de la Table ci-jointe) les trois quan-
tités $- 6a^3 + 3a^2b$, $16x^3 + 16bxx$,

$16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$, dans lesquel-
les cette quantité se change par la supposition
de x, a, b égaux à zero. J'écris dans la se-
conde colonne, & à la premiere bande, $a, 3a$,
 $- 2a + b$, $- 6a + 3b$ diviseurs d'une di-
mension & à une ou deux lettres de la quantité
 $- 6a^3 + 3a^2b$. De même dans la seconde
bande, j'écris les diviseurs $x, 2x, 4x, 8x$,
 $16x; x + b, 2x + 2b, 4x + 4b, 8x + 8b$,
 $16x + 16b$, de la seconde quantité $16x^3$
 $+ 16bxx$: & dans la troisième bande, $a - 4x$,
 $3a - 4x, x - 2a$ diviseurs de la troisième
quantité $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$.

Cela fait, à cause du grand nombre de ces
diviseurs, il faut plus d'attention que dans les
exemples précédens pour n'en laisser aucun
qui puisse avoir les conditions requises; &
l'ordre qu'on doit suivre est à peu près le même
que celui qu'on a suivi dans les diviseurs numé-
riques. Il faut d'abord comparer le premier de la
premiere bande avec tous ceux des autres ban-
des, & faire ensuite la même opération pour
chacun des autres diviseurs de la premiere ban-
de. Je vois d'abord que si a fait partie d'un
diviseur de la quantité, ce ne peut être que
d'un diviseur qui ne contienne que a & x par-
ce que s'il y avoit un terme qui contint b , ce
diviseur ne se seroit pas réduit à a par la sup-

position de $x=0$. Ainsi je n'ai à choisir dans ce cas que parmi les cinq premiers diviseurs $x, 2x, 4x, 8x, 16x$, & comme de tous ces diviseurs il n'y a que $4x$ qui soit répété dans la troisième, en supposant que ce diviseur $4x$ soit affecté du signe — ; & qu'en même-tems de tous les diviseurs de la troisième bande, il n'y a que le premier $a-4x$ qui renferme le même terme a de la première bande, je conclus que si a fait partie d'un diviseur, il faut que ce diviseur soit $a-4x$, je l'écris donc à part. Je passe après à $3a$, & comme je le trouve répété dans le diviseur $3a-4x$ de la troisième bande, & que l'autre terme $4x$ du même diviseur se trouve être un des diviseurs de la seconde bande en changeant le signe de ce diviseur, je conclus que $3a-4x$ peut-être encore un diviseur de la quantité proposée, & je le mets à part afin de l'essayer.

Quant à $-2a+b$ on voit d'abord qu'il ne peut pas seul être un diviseur de la quantité proposée, parce qu'il faudroit pour cela que parmi les diviseurs de $16x^3+16bxx$, on eut le terme b que deviendrait $-2a+b$ par la supposition de $a=0$, reste donc à sçavoir s'il ne seroit pas partie d'un diviseur où x entreroit; pour m'en assurer, je commence par remarquer que de tous les diviseurs de la seconde bande il n'y a que $x+b$ avec lequel on puisse le comparer à cause qu'il n'y a que ce seul diviseur qui ait le terme $+b$ de commun avec lui. Je vois aussi qu'il n'y a que $x-2a$ de la troisième bande avec lequel je

puisse comparer le même diviseur $-2a+b$, parce qu'il n'y a que lui qui contienne le terme $-2a$. Je vois ensuite que de même que les deux termes du diviseur $-2a+b$ sont répétés dans les deux autres diviseurs $x+b$, $x-2a$, le diviseur $x+b$ a aussi les deux termes répétés dans les deux autres $-2a+b$, $x-2a$, & réciproquement que les deux termes du diviseur $x-2a$ sont répétés dans les deux autres $x+b$, $-2a+b$. De-là je conclus que les trois diviseurs $-2a+b$, $x+b$, $x-2a$ ont les conditions nécessaires pour former un diviseur. Je les ajoute donc, & je mets à part la moitié $x-2a+b$ de leur somme pour un diviseur à tenter. Mais avant d'en faire le calcul j'examine ce que peut me donner le diviseur $-6a+3b$, je vois tout de suite qu'il n'y a aucun de ses deux termes qui soit répété parmi les diviseurs des autres bandes, & qu'ainsi il faut le rejeter.

Par cet examen on trouve donc les trois diviseurs $a-4x$, $3a-4x$, $x-2a+b$ à essayer, je tente la division par le dernier, elle réussit, & ne donne pour quotient $3a-16ax+16xx$, que je divise ensuite par $3a-4x$, & la division réussit encore, & me donne pour quotient le premier diviseur $a-4x$. Ainsi la quantité proposée étoit le produit de ces trois diviseurs.

XXXVI.

Méthode
pour trouver
les diviseurs
de deux di-

Si la quantité proposée n'a point de diviseur d'une dimension, & qu'on veuille examiner si elle n'en a point de deux, on y par-

81

les mentions &
les à trois lettres.

ris

e-

n-

o,

és.

ue

a

de

es

f-

és

es

st-

la

is

x

-

ii

s

s

r

Application
de cette méthode à un
exemple.

i

en ait deux

180
puil
par
me
les
rép
x-
ter
x-
me
de
ce
x-
pe
&
le
a
n
t
n
a

Méthode
pour trouver
les diviseurs
de deux

viendra assez facilement à l'aide de quelques observations analogues à celles sur lesquelles est fondée la méthode précédente. Soit pris $mx^2 + nax + pbx + qa^2 + rab + sbb$ pour représenter le diviseur cherché à deux dimensions; faisant successivement $x = 0$, $a = 0$, $b = 0$ dans cette quantité j'ai les trois quantités.

$$\begin{aligned} & qa^2 + rab + sbb \\ & mx^2 + pbx + sbb \\ & mx^2 + nax + qa^2 \end{aligned}$$

qui sont toutes trois des diviseurs de ce que devient la quantité proposée lorsqu'on y a fait successivement les mêmes suppositions de x , a , b égaux à zero. De plus chacun de ces diviseurs est toujours tel, que les termes affectés de lettres quarrées sont toujours répétés dans les deux autres diviseurs, tandis que les termes qui contiennent un produit de deux lettres sont toujours les seuls de leur espece. Voilà donc des conditions pour examiner les trois classes de diviseurs de deux lettres & de deux dimensions qu'on tirera d'une quantité proposée, ainsi quand on en aura trouvé trois qui rempliront ces conditions, on n'aura qu'à les ajouter, prendre ensuite la moitié de tous les termes affectés de quarrés, & laisser en entier ceux qui ne seront que des rectangles.

XXVII.

Pour montrer l'application de cette méthode soit la quantité $x^4 - 4ax^3 - 5a^2x^2 + 4b^2x^3 - a^4x^2 - 14ab^2x^2 + 3b^4x - a^4x - 3ab^2$, laquelle n'a aucun diviseur d'une seule dimension, & dont on cherche quelque diviseur qui en ait deux.

Application de cette méthode à un exemple.

On commencera par garder (voyez la première Case de la Table ci-jointe) les trois quantités $-3a^3b^2, x^4+4b^2x^3+3b^4x; x^4-4ax^4-5a^2x^3-a^3x^2-a^4x$ qu'on n'aura pas manqué de tirer de cette quantité, en faisant successivement x, a, b égaux à zero, lorsqu'on aura voulu s'assurer qu'elle n'avoit point de diviseurs d'une dimension. On mettra ensuite à côté de ces quantités leurs diviseurs de deux dimensions; la première fournissant $a^2, ab, b^2, 3a^2, 3ab, 3bb$; la seconde x^2+3b^2, x^2+b^2 ; la troisième seulement x^2+ax . Dans cette méthode on ne sçauroit rejeter les diviseurs qui n'ont qu'un terme, quand même on se seroit assuré que la quantité proposée n'a aucun diviseur à deux lettres, parce qu'un diviseur à trois lettres & de deux dimensions peut se réduire à un seul terme par la supposition de l'une des lettres égale à zero.

Il s'agit présentement d'examiner tous les diviseurs de la première bande, je vois d'abord que le premier a^2 est à rejeter, parce que ce carré ne se trouve point répété dans les autres bandes, je passe ensuite à ab , & de ce que ce diviseur ne contient aucun terme affecté de aa & de bb , je conclus que le diviseur dont il pourroit faire partie ne peut avoir outre ce terme que des xx , des ax , & des bx , & comme cette raison exclut la comparaison qu'on pourroit faire de ab avec les diviseurs x^2+3b^2, x^2+b^2 , il s'ensuit que si ab doit faire partie d'un diviseur de la proposée, ce diviseur ne peut être que $xx+ax+ba$;

mais je vois en même-tems que $xx+ax+ba$ ne ſçauroit être un diviſeur de la propoſée , puifqu'il deviendrait ſeulement xx par la ſuppoſition de $a=0$, & que xx n'eſt point un des diviſeurs de la ſeconde bande. Donc le diviſeur ab eſt encore à rejeter.

Quand au diviſeur bb , je le trouve répété dans le diviſeur x^2+b^2 de la ſeconde bande, & trouvant que le même diviſeur x^2+b^2 , a x^2 de commun avec le diviſeur de la troiſième bande , je conclus que x^2+b^2+ax a les conditions requiſes pour tenter la diviſion. Mais avant de l'entreprendre je paſſe aux autres diviſeurs de la première bande , & je vois d'abord que $3aa$, & $3ab$ ſont à rejeter par la même raiſon que a^2 & ab ; je vois enſuite que $3bb$ étant répété dans le diviſeur x^2+3b^2 & x^2 dans $xx+ax$, il ſ'enſuit que $xx+3bb+ax$ a auſſi les conditions requiſes pour tenter la diviſion ; j'eſſaye alors ces deux diviſions , & je trouve que la ſeconde ſeule réuſſit en donnant pour quotient $x^3-5ax^2+b^2x-a^3$.

Au lieu de parcourir tous les diviſeurs de la première bande , on auroit pû examiner le ſeul que la dernière bande contient , & trouver bien plutôt que x^2+ax+b^2 & $x^2+ax+3b^2$ étoient les ſeuls diviſeurs à tenter. Car il ſuffiſoit alors de remarquer que le diviſeur x^2+ax contenant x^2 qui eſt répété dans x^2+3b^2 & x^2+b^2 , & que ces deux derniers contenant l'un $3b^2$ & l'autre b^2 qui ſont chacun dans les diviſeurs de la première bande , il ſ'enſuit que x^2+ax+b^2 & $x^2+ax+3b^2$

ont les conditions requises & qu'ils sont les seuls, puisque s'il y en avoit d'autres, ou bien ils auroient donné d'autres quantités que $xx+ax$ par la supposition de $b=0$, ou bien d'autres quantités que x^2+3b^2 & x^2+k^2 par la supposition de $a=0$.

X X X V I I I.

Autre exemple,

Qu'on ait présentement à chercher les diviseurs de la quantité $2x^4+3ax^3+b^2x^3-a^2x^3+4ab^2x^2+6a^2b^2x+2ab^4-2a^3b^2$, soit d'une dimension, soit de deux, soit à deux lettres, soit à trois.

$2ab^4-2a^3b^2$, $2x^4+b^2x^3$, & $2x^4+3ax^3-a^2x^3$ étant les quantités que donne, dans la proposée, la supposition de x, a, b égaux à zero, il s'agit de ranger d'abord vis-à-vis de chacune de ces quantités tous les diviseurs qu'elles peuvent avoir tant d'une dimension que de deux; comme la première de ces trois quantités en a un assez grand nombre, il faut, dans la crainte d'en omettre quelqu'un, les chercher tous avec le même ordre que nous avons suivi pour les diviseurs numériques.

Application de la méthode donnée Art. XIV. pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, aux quantités littérales.

Ayant écrit (voyez la première Case de la Table ci-jointe) cette première quantité $2ab^4-2a^3bb$ à part avec une barre à sa gauche, & à gauche de cette barre l'unité comme premier diviseur de la quantité, je pose 2 au-dessous de 1, parce que c'est après 1 le diviseur le plus simple que puisse avoir cette quantité, & j'écris à droite de la même barre ab^4-a^3bb ; je divise ensuite cette quantité par a , & j'écris a à gauche de la barre, en mettant en même

tems à droite le quotient $b^4 - a^2 b^2$, je multiplie alors a par 2, ce qui me donne $2a$ que j'écris à gauche de l' a comme un nouveau diviseur de la quantité, puis je divise $b^4 - a^2 b^2$, par b , & j'écris le diviseur b à gauche, & le quotient $b^3 - a^2 b$ à droite; enfin je multiplie b par 2, par a , par $2a$; & je mets à gauche de b , les produits, $2b$, ab , $2ab$ comme de nouveaux diviseurs de la quantité.

La quantité étant réduite à $b^3 - a^2 b$, je la divise encore par b que j'écris toujours à gauche, ainsi que le quotient $bb - aa$ à droite; je ne multiplie point ensuite b par 2, ni par a , ni par $2a$, parce que cela donneroit des diviseurs que j'ai déjà eu; mais je le multiplie par b & par $2b$, ce qui me donne les nouveaux diviseurs de deux dimensions bb & $2bb$; si j'en voulois admettre de trois dimensions, ainsi que cela peut être nécessaire dans d'autres occasions, je multiplierois outre cela b par ab & $2ab$.

Après avoir réduit la quantité à $bb - aa$, je vois qu'elle est divisible par $b - a$, & que le quotient est $b + a$, j'écris donc l'un à gauche & l'autre à droite, & je multiplie $b - a$ par 2, par a , par b , par $2a$, & par $2b$, ce qui me donne pour nouveaux diviseurs d'une & de deux dimensions, $2b - 2a$, $ba - aa$, $bb - ab$, $2ba - 2aa$, $2bb - 2ab$. Si j'en avois voulu de trois & de quatre dimensions, j'aurois outre cela multiplié $b - a$ par ab , $2ab$, abb , $2abb$. $b + a$ n'ayant plus ensuite d'autre diviseur que lui-même, je l'écris à gauche, & je le multi-

plie par 2, par a , par b , par $2b$, $1a$, $b - a$, $1b - 2a$, ce qui me donne les nouveaux diviseurs d'une & de deux dimensions, $2b + 2a$, $ba + aa$, $2ba + 2aa$, $bb + ab$, $1bb + 1ab$, $bb - aa$, $1bb - 2aa$. Si j'en avois voulu admettre de trois, quatre & cinq dimensions, c'est à dire tous les diviseurs que la quantité proposée pouvoit avoir, j'aurois multiplié outre cela $b + a$ par ab , $2ab$, bb , $1bb$, abb , $2abb$, $ba - aa$, $1ba - 2aa$, $bb - ab$, $2bb - 1ab$, $abb - aab$, $1abb - 1a^2b$, $b^3 - ab^2$, $1b^3 - 2ab^2$, $ab^3 - a^2b^2$, $1ab^3 - 2a^2b^2$.

Cela fait, j'écris (voyez la troisième Case de la Table ci-jointe) tous les diviseurs d'une & de deux dimensions a , $2a$, b , $1b$, $b - a$, $1b - 1a$, $b + a$, $1b + 1a$, ab , $2ab$, $ab - aa$, $2ba - 1aa$, $bb - ab$, $2bb - 1ab$, $ba + aa$, $1ba + 2aa$, $bb + 1a$, $1bb + 1ab$ à côté de la quantité $2ab^4 - 2a^3b^1$ qui les a donnés. J'écris ensuite à côté de la quantité $2x^5 + b^2x^1$ les diviseurs d'une & de deux dimensions x , x^1 , $1xx + bb$, & à côté de la quantité $2x^7 + 3ax^4 - a^2x^3$ les diviseurs d'une & de deux dimensions x , x^1 , $1xx + 3ax - aa$.

Parcourant après tous ces diviseurs pour sçavoir ceux qui peuvent être admis, je trouve bien-tôt qu'il n'y en a aucun d'une seule dimension, car ne trouvant que x dans la seconde & la troisième bande qui soit d'une dimension, je conclus qu'il doit être le seul diviseur d'une dimension s'il y en peut avoir, puisque si le diviseur d'une dimension renfermoit ou un terme affecté de a ou un affecté

de b , celui qui auroit été affecté de a seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $b=0$, & que celui qui auroit été affecté de b seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $a=0$. Mais x n'est point un diviseur de la quantité proposée, donc il n'y en a point d'une dimension. Je viens ensuite aux diviseurs de deux dimensions, & je commence par x^2 que je prends dans la troisième bande; trouvant qu'il est aussi dans la seconde bande, je conclus que s'il fait partie d'un diviseur, il ne peut lui manquer qu'un terme affecté du rectangle ab , parce que s'il y en avoit eu qui fussent affectés de aa , de bb , de ax , ou de bx , ceux qui auroient été affectés de bb ou de bx ne s'en seroient pas allés par la supposition de $a=0$, & ceux qui auroient été affectés de aa ou de ax n'auroient pas disparu par la supposition de $b=0$. Mais je trouve dans la première bande ab & $2ab$, donc $xx+ab$, $xx+2ab$, $xx-ab$, $xx-2ab$, sont des diviseurs à tenter.

Je passe ensuite au diviseur $2x^2+3ax-aa$, & je trouve le terme $2x^2$ répété au-dessus dans le diviseur $2xx+bb$, je trouve en même-tems le terme $-a$ répété en haut dans plusieurs diviseurs, mais de tous les diviseurs où il est répété, il n'y a que $bb-aa$ qui ait en même-tems le terme ab que contient le diviseur $2xx+bb$, ainsi ce n'est qu'avec $2xx+bb$ & $bb-aa$ que $2x^2+3ax-aa$ peut concourir à former un diviseur qui ait les conditions requises, & ce diviseur qui est $2x^2+3ax$

— $aa + bb$, est par conséquent à tenter, & je vois qu'il n'y en a plus d'autre à chercher, parce que s'il pouvoit y en avoir un qui n'eût pas été déterminé dans l'examen qu'on vient de faire des diviseurs & de la troisième bande, il faudroit que ce fut un seul terme affecté de ab ; or on voit tout de suite que la quantité n'a point de diviseur de cette nature.

Je tente alors la division par $2xx + 3ax - aa + bb$, elle réussit, & me donne pour quotient $x^3 + 2abb$ qui m'apprend qu'aucune des quantités $xx + ab$, $xx - ab$, $xx + 2ab$, $xx - 2ab$, ne peut diviser la proposée.

X X X I X.

Si la quantité proposée avoit plus de cinq dimensions, & qu'après s'être assuré qu'elle n'a aucun diviseur, ni d'une ni de deux dimensions, on voulut chercher ceux du troisième, quatrième, &c. degré qu'elle pourroit avoir, on suivroit pour cela une méthode analogue à celles qu'on vient d'expliquer, & qu'il est assez aisé d'imaginer.

Si la quantité dont on cherche les diviseurs renfermoit plus de trois lettres, la méthode qu'il faudroit suivre pour les trouver seroit à très-peu de chose près la même que lorsqu'il n'y en a que trois, ainsi nous laisserons les Commencans s'y exercer.

X L.

Ce qu'il faut faire pour ouvrir les Lorsqu'on aura une quantité dont tous les termes ne seront pas homogènes, c'est-à-dire

Case 1.

$$\begin{array}{r}
 3b^2 \\
 x^2 + 3b^2 \\
 x^2 + ax \\
 \hline
 x^2 + 3b^2 + ax
 \end{array}$$

Case 2.

1	2ab ² - 2a ³ b ₁
2	ab ⁴ - a ³ bb
2a, a	b ⁴ - a ² b ²
2ab, ab, 2b, b	b ₁ - a ³ b
2abb, abb, 2bb, bb, b	b ² - a ²
2a ² , ba - a ² , 2b - 2a, b - a	b + a
$\left\{ \begin{array}{l} +2a^2, ba+a^2, 2b+2a, b+a \\ -2a^3, bba-a^3, 2b^2-2a^2, b^2-a^2 \end{array} \right\}$	1

Case 3.

2a ² 2ab	bb - aa
xx	2xx + bb
2x ²	2xx + 3ax - aa
2x ³ xx	2xx + bb + 3ax - aa
+ 2ab	
- 2ab	

élevés à la même dimension, on n'aura qu'à diviseurs des quantités qui ne sont pas homogènes. commencer par mettre tous les termes à la même dimension à l'aide d'une nouvelle lettre, & chercher les diviseurs de cette nouvelle quantité par les règles précédentes. Ces diviseurs trouvés, on en chassera la nouvelle lettre introduite en la supposant égale à l'unité, & l'on aura par ce moyen les diviseurs cherchés. Que j'aye, par exemple la quantité $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^3 + bx - b$; je multiplie le terme bx^4 par a , afin de le rendre de six dimensions. Par la même raison je multiplie x^3 par a^4 , bx par a^4 , & b par a^6 ; ce qui me donne la quantité $x^6 + bx^5 - abx^4 + a^4xx + a^4bx - a^6b$ que je trouve par les méthodes précédentes être le produit de $xx - a^4 + bx$ par $x^4 + a^4$. Je suppose $a=1$ dans ces deux produisans, ce qui me donne $xx - b + bx$, & $x^4 + 1$ pour les deux produisans de la quantité proposée $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^3 + bx - b$.

X L I.

Il y a des cas où les diviseurs se trouvent plus facilement qu'en suivant les méthodes précédentes lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul. Voici un de ces cas sur lequel il est bon de prévenir les Commensans.

Lorsque quelqu'une des lettres de la quantité proposée ne montera qu'à une dimension, il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir qu'un des diviseurs de cette quantité qui contienne cette lettre. Donc il y aura au moins un diviseur qui ne la contiendra pas, & alors suivant la méthode de l'article **xxix**, pour trouver

Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.

ce diviseur , il faudra chercher le plus grand commun diviseur des termes où cette lettre se trouve , & des autres termes dans lesquels cette lettre ne se trouve pas.

Soit par exemple la quantité $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8a^2cx + ba^2c - 8a^4$; je cherche le plus grand commun diviseur des deux parties $cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$ & $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$ de cette quantité , l'une contenant la lettre c , l'autre n'en contenant point , je trouve pour ce plus grand diviseur commun $x^2 + 2ax - 2aa$, & c'est le diviseur cherché de la quantité proposée.





ELEMENTS D'ALGEBRE.

QUATRIÈME PARTIE.

Résolution des Equations de degrés quelconques lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux par la méthode des Equations du second degré : avec différentes opérations nécessaires pour ces Equations, comme l'élevation des puissances, l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, &c.



PRE's avoir vû comment on tiroit d'une Equation qui passoit le second degré, celles du premier & du second degré qu'elle pouvoit renfermer ; il faut voir ce qu'on a fait pour résoudre

les Equations qui échappent à cette méthode

I.

Des Equations du troisième degré à deux termes.

Pour aller du plus simple au plus composé, nous commencerons par les Equations qui ne contiennent que deux termes ; supposons d'abord qu'elles ne montent qu'au troisième degré, comme $ax^3 = b$.

On met un 3 sur le caractère $\sqrt{}$ pour exprimer la racine cube.

Pour résoudre ces Equations, il est bien aisé d'imaginer de délivrer d'abord x de son coefficient, & de prendre la racine cube des deux membres. Le caractère qu'on employe pour exprimer la racine cube, est le même que celui dont on se sert dans la racine quarrée ; mais l'on met un 3 au-dessus pour le distinguer.

Ainsi pour exprimer la valeur de x qu'on tire de l'Equation $ax^3 = b$ ou $x^3 = \frac{b}{a}$, on met $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Si par exemple $b = 1000$ & $a = 2$ on a $x = \sqrt[3]{500}$.

II.

Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois.

Il est à observer qu'on n'a pas ici, comme dans les racines quarrées, la liberté de mettre $+$ ou $-$ devant le signe radical, mais qu'au contraire la racine cube d'une quantité est toujours de même signe que la quantité elle-même : à cause que le cube d'une quantité positive est positif, & que celui d'une quantité négative est négatif.

III.

III.

Cette résolution fournit assez naturellement une réflexion qui paroît contredire celles qu'on a faites précédemment sur le nombre des racines des Equations. Car un cube n'ayant qu'une racine & cette racine n'ayant qu'un signe, il ne paroît pas qu'une Equation telle que $ax^3 = b$ donne plus d'une valeur de x , cependant si l'on voit ce qu'on a vu ci-dessus, on devroit s'attendre à trouver trois racines dans une Equation du 3^{ème} degré, de même que deux dans une du second.

Que conclure de cette réflexion ? abandonnera-t-on ce principe si satisfaisant par sa généralité, & qui suit si naturellement de la formation des Equations exposée dans la III^{ème} Partie, article II. ? Voici le dénouement de cette difficulté tiré de la même formation.

Qu'on mette l'Equation $ax^3 = b$ sous cette forme $x^3 - \frac{b}{a} = 0$, qu'on mette aussi sa ra-

cine $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sous la forme $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$,

qu'on divise alors $x^3 - \frac{b}{a}$ par $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, on trouvera une Equation du second degré qui contiendra les deux autres racines.

Pour en faire le calcul plus aisément, soit fait $\frac{b}{a} = c^3$, on aura donc au lieu des Equations

précédentes $x^3 - c^3 = 0$, & $x - c = 0$; divisant la première par la seconde, il vient au quotient $xx + cx + cc = 0$, dont les deux racines sont exprimées par

$x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}cc}$, & deviendront la seconde & la troisième valeur cherchée de x dans l'Equation $x^3 = \frac{b}{a}$, aussi-tôt qu'on aura remis à la place de c la valeur $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

I V.

La substitution faite, on aura pour ces deux valeurs de x , $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$. Car on voit que le carré de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire le produit de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ par $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ doit être $\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}$; &

Comment
on multiplie
les radicaux
cubes.

qu'en général la multiplication des racines cubes comme celles des racines quarrées se fait en multipliant d'abord les quantités qui sont sous le signe radical, & en mettant ensuite ce signe devant leur produit.

V.

Racines de
l'Equation
du troisième
degré à deux
termes.

Les trois racines de l'Equation proposée $ax^3 = b$, sont donc $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

$$+ \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}, \quad x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} -$$

$\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$; la première réelle, & les deux autres imaginaires, mais cependant toujours telles qu'on peut dire qu'elles résolvent l'Equation proposée.

VI.

Supposons maintenant qu'on ait une Equation à deux termes d'un degré quelconque, on la résoudra de la même manière, en employant un radical dont l'exposant soit celui de l'inconnue dans cette Equation. Soit, par exemple, l'Equation $ax^m = b$, ou $x^m = \frac{b}{a}$, on en tirera $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

Des Equations à deux termes & d'un degré quelconque.

Si m est un nombre impair, cette quantité ne pourra être que négative, lorsque $\frac{b}{a}$ sera négatif, & elle ne pourra être que positive, lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Si m est un nombre pair, la racine aura comme dans le second degré le signe \pm , & elle ne sera réelle que lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Dans le cas où $\frac{b}{a}$ sera négatif (m toujours pair) les deux racines exprimées par $\pm \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ seront alors toutes les deux imaginaires. Ainsi toutes les Equations exprimées généralement par $x^m = \frac{b}{a}$ ne pourront au plus, avoir que deux racines réelles, les autres racines étant nécessairement imaginaires.

Ces Equations ne sçauroient jamais avoir plus de deux racines réelles.

Qu'on ait, par exemple, $x^4 = 256$, les deux racines réelles sont $+4$ & -4 , les deux imaginaires sont $+\sqrt{-16}$ & $-\sqrt{-16}$. Dans l'Equation $x^3 = 243$ la seule racine réelle est $+3$, & les autres celles qu'on doit trouver

N ij

en résolvant l'Equation $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 = 0$ qui vient par la division de l'Equation $x^3 - 243 = 0$ par l'Equation $x - 3 = 0$. Sans résoudre cette Equation, on doit être assuré que ses racines sont toutes imaginaires, puisque s'il y en avoit quelqu'une de réelle, elle résoudroit aussi $x^3 = 243$, & par conséquent il y auroit d'autre nombre réel que 3 qui, élevé à la cinquième puissance, donneroit 243.

VII.

Il ne manque présentement à ce que nous venons de dire sur les Equations à deux termes, que de pouvoir abrégier ou simplifier les expressions radicales qu'elles donnent lorsqu'il y aura une partie de la quantité dont on pourra prendre exactement la racine, ou même de pouvoir éviter entièrement le signe radical lorsque la quantité entière sera une puissance complete.

Pour reconnoître ces cas, il faut commencer par faire quelques réflexions sur l'inverse de l'opération qu'on se propose alors, c'est-à-dire sur l'élevation des quantités à des puissances quelconques.

Réflexions
sur l'éleva-
tion des puis-
sances.

Qu'on ait, par exemple une quantité telle que $a b c d$ à élever à la puissance m , on voit bien qu'il viendra par cette opération $a^m b^m c^m d^m$.

Qu'il s'agisse d'élever à une puissance quelconque, une quantité, comme $\frac{a b c}{d e}$ qui a un diviseur, il est clair qu'il faudra élever le di-

viseur, ainsi que le numérateur à cette puissance quelconque, & que s'il y avoit des coefficients, il faudroit qu'ils fussent aussi élevés à la même puissance. De plus, si les facteurs ou produisans de la quantité donnée se trouvoient déjà élevés à quelques puissances, ils deviendroient alors élevés à une nouvelle puissance, dont l'exposant seroit le produit de l'exposant qu'ils avoient d'abord par celui de la puissance à laquelle on les voudroit élever. Ainsi

$\frac{2 a^2 b^3}{c^4}$ élevé à la puissance 3, donnera

$\frac{8 a^6 b^9}{27 c^{12}}$; $\frac{a^m b^r}{c^n}$ à la puissance q , deviendra

$\frac{a^{mq} b^{rq}}{c^{nq}}$. Tout cela est fort simple, & suit

entièrement de ce principe, qu'une quantité élevée à une puissance quelconque, est ce qui vient de la multiplication de cette quantité par elle-même autant de fois moins une, que l'exposant de la puissance contient d'unités.

VIII.

On voit bien présentement que l'inverse de cette opération, c'est-à-dire l'extraction des racines ne demandera autre chose que de diviser les exposans des parties ou facteurs de cette quantité par l'exposant de la racine; soit que ces parties ou facteurs soient dans le numérateur, soit qu'ils soient aussi dans le dénominateur. Qu'il soit question, par exemple de

Application
des réflexions
précédentes à l'ex-
traction des
racines.

prendre la racine cube de $\frac{a^3b^6}{c^9}$, en divisant par 3 les exposans 3, 6, 9, & en mettant leurs quotiens 1, 2, 3, aux mêmes lettres, on aura $\frac{ab^2}{c^3}$ pour la racine cube cherchée.

S'il y avoit eu un coefficient à la quantité, on en auroit pris la racine cube, $\frac{8a^3b^6}{c^9}$, par exemple, auroit donné $\frac{2ab^2}{c^3}$ pour la racine cube.

De la même maniere, si on cherche la racine quarrée quarrée, ou quatrième de $\frac{16a^4b^8}{d^4c^{12}}$, on trouvera $\frac{2ab^2}{dc^3}$.

I X.

De l'extraction des racines lorsqu'on a des puissances incomplètes. Lorsqu'il n'y aura qu'une partie de la quantité qui se pourra extraire, on l'extraira, & on laissera le reste sous le signe radical affecté de l'exposant qui lui convient. Soit proposé, par exemple, de prendre la racine cinquième de $\frac{32a^{10}b^5}{486c^7}$ qui est composé du produit de $\frac{32a^{10}b^5}{243c^5}$ par $\frac{b^3}{2c^2}$, dont la première est exactement la cinquième puissance de

$\frac{2a^3b}{3c}$, & dont la seconde n'a pas de cin-

quième racine, il faudra écrire alors

$$\frac{2a^3b}{3c} \sqrt{\frac{b^3}{2c^3}}.$$

De même la racine cube de $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ sera

$\frac{2}{3}a \sqrt{\frac{b+2c}{2d}}$, parce que $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ est le

produit de $\frac{8a^3}{27}$ par $\frac{b+2c}{2d}$, & que la première

de ces deux quantités est un cube parfait, celui de $\frac{2}{3}a$, & que la seconde n'a point de racine cube.

$$\begin{aligned} \text{De même } & \sqrt{\frac{12a^9+128a^6b-160a^3b^4}{3b^6}} \\ &= \frac{2a}{b} \sqrt{\frac{a^4+4ab-16b^4}{3b}}. \end{aligned}$$

X.

Lorsque la quantité dont il sera nécessaire d'extraire la racine sera composée ainsi que les précédentes, de plusieurs termes, & qu'après avoir séparé de tous les termes les quantités communes qui sont des puissances complètes, on soupçonnera que le reste pourroit être la puissance complète de quelque quantité commensurable composée de plusieurs termes, l'opération qu'il faudra faire pour s'en assurer sera plus difficile. Afin de trouver la méthode qu'il faut suivre dans cette opéra-

tion, nous commencerons par faire quelques réflexions sur le Problème inverse, c'est-à-dire sur l'élevation des quantités complexes à des exposans donnés, & nous en tirerons ensuite les principes, qu'il faut pour extraire les racines de ces sortes de quantités.

Cherchons d'abord comment l'élevation au cube peut donner la méthode d'extraire les racines cubes, on verra après que les autres puissances n'augmentent la difficulté que par la longueur des calculs.

X I.

Soit prise la quantité complexe la plus simple $u+z$, & soit élevée cette quantité au cube. L'on aura premierement pour son carré $uu+2uz+zz$, & multipliant ce carré par la simple puissance, on aura enfin le cube $u+3uu+3uuz+3uzz+z$, qui apprend qu'une quantité quelconque composée de deux parties, étant élevée au cube, donne d'abord le cube de la première partie, ensuite le triple du carré de cette première partie multiplié par la seconde partie; de plus, le triple de la première partie multiplié par le carré de la seconde; enfin le cube de la seconde.

En quoi consiste le cube d'un bino

X I I.

Méthode qu'il faut suivre pour prendre la racine cube des quantités complexes.

Qu'on ait donc une quantité dont on veuille extraire la racine cube, on commencera par y chercher un terme qui soit un cube, & ce cube représentera u^3 , l'on écrira à côté sa racine qui représentera u , on triplera ensuite

le carré de cette racine, & on le fera servir de diviseur à ce qui reste de la quantité donnée de laquelle on aura ôté le cube de la racine premièrement posée; le quotient de cette division sera la seconde partie de la racine, & représentera z ; l'ayant écrit à côté du premier terme, on multipliera ensuite ce dernier terme par la quantité qui représente $3uu+3uz+zz$, c'est-à-dire par le triple du carré de la première partie, plus le triple du produit de la première quantité par la seconde, plus le carré de la seconde: la multiplication faite, on retranchera le produit qu'elle donnera de la quantité proposée, dont le premier cube représentant u^3 a déjà été ôté. S'il ne reste rien, on sera sûr que la quantité étoit exactement le cube du binôme répondant à $u+z$. S'il reste encore plusieurs termes, & qu'on veuille sçavoir si elle ne seroit point le cube d'un trinôme; pour trouver le troisième terme, on fera des deux termes déjà écrits, le même usage qu'on a fait du premier terme lorsqu'on a cherché le second.

XIII.

Quelques exemples éclairciront cette méthode. Soit la quantité $8y^6+60y^4b^2+150b^2y^2+125b^6$; je commence par prendre la racine cube du premier terme $8y^6$, & j'écris cette racine (voyez la Table ci-jointe Case 1) $2y^2$ à côté de la quantité proposée; je récris ensuite le cube de $2y^2$ avec le signe — sous la quantité proposée, en observant d'en chan-

Premier
exemple.

ger le signe, la soustraction ou réduction faite; j'écris le reste $60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$, je mets au-dessus de $2y^2$ le triple de son quarré, c'est-à-dire $12y^4$, & je divise le premier terme $60y^4b^2$ par ce triplé $12y^4$, quant au quotient $5b^2$ qui vient de cette division, je l'écris à côté de $2y^2$; j'ajoute ensuite à $12y^4$, $30b^2y^2$ produit du triple de $2y^2$ par la quantité $5b^2$ que je viens d'écrire, & j'ajoute à ces deux premiers termes $25b^4$ quarré de $5b^2$.

Cela fait, je multiplie $5b^2$ par ces trois termes, & j'écris leurs produits avec des signes différens sous la quantité $60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$, & voyant qu'après la réduction il ne reste rien, je conclus que la quantité proposée étoit un cube parfait, & que sa racine étoit $2y^2 + 5b^2$.

XIV.

Second
exemple.

Que j'aye à présent la quantité $x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$ qu'on voit bien au premier coup d'œil devoir donner plus de deux termes pour sa racine cube, je commence d'abord par trouver avec la même facilité (voyez la table ci-jointe Case 2) que dans l'exemple précédent les deux premiers termes $x^2 + 2bx$; mais comme au lieu de ne rien rester ainsi qu'il est arrivé dans cet exemple, il vient pour reste $9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$, je divise le premier terme $9b^2x^4$ de ce reste par $3x^4$ triple du quarré de x^2 , parce que ce ter-

me $3x^4$ est le premier du triple du carré de la quantité $xx+2bx$, laquelle représente actuellement la première partie (nommée *art. xi.*) de la racine cube cherchée : ayant fait cette division de $9b^2x^4$ pour $3x^4$, j'écris le quotient $3b^2$ à côté de $xx+2bx$. Je forme ensuite la quantité $3x^4+12bx^3+21b^2x^2+18b^3x+9b^4$, en ajoutant ensemble le triple du carré de $xx+2bx$, le triple du produit de $xx+2bx$ par $3b^2$, & le carré de $3b^2$. Cela fait, je multiplie cette quantité par $3b^2$, & j'écris tous les termes du produit, en changeant leurs signes, sous la quantité $9b^2x^4+36b^3x^3+63b^4x^2+54b^5x+27b^6$, & comme il ne reste rien après la réduction, je conclus que $x^3+2bx+3b^2$ est exactement la racine cube de la quantité proposée.

XV.

Nous avons vu (II^e Part. art. xxiv, xxv & xxvi.) comment on faisoit, sur les quantités radicales du second degré, les opérations d'addition, soustraction, multiplication, & division. Comme ces opérations sont également nécessaires pour les quantités radicales des degrés plus élevés, nous allons examiner ce que demandent ces nouveaux radicaux.

Quant à l'addition & à la soustraction, il n'y a rien à ajouter à ce qu'on a dit pour les mêmes opérations sur les radicaux du second degré, car il suffit de réduire chaque radical à sa plus simple expression, & de les ajouter ou de les retrancher comme les quantités commensurables.

Additions & soustractions des quantités radicales de toute espèce.

Qu'on ait, par exemple $\sqrt[3]{b^4+2ab^3}$ à ôter de $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$, on change la première quantité en $b\sqrt[3]{b+2a}$, & la seconde en $2a\sqrt[3]{b+2a}$; or la soustraction est alors toute simple, & donne $2a-b\sqrt[3]{b+2a}$.

De même si on ajoute $3a\sqrt[4]{16b^3+32b^4a^4}$ avec $4b\sqrt[4]{a^4b^4+2a^8}$, on aura $10ab\sqrt[4]{b^4+2a^4}$.

X V I.

Multiplication & division des quantités radicales qui ont mêmes exposans.

A l'égard de la multiplication & de la division, si les quantités radicales sont de même exposant, c'est encore la même méthode que dans les radicaux du second degré, il suffit de faire l'opération sur les quantités précédées du signe radical, & de mettre le même signe devant le produit, ou devant le quotient, suivant qu'on aura fait une multiplication ou une division.

Exemples. C'est ainsi que $\sqrt[3]{5ayy} \times \sqrt[3]{7ayz} = \sqrt[3]{35aay^3z}$,
ou $y\sqrt[3]{35a^2z}$.

$$\text{Que } \sqrt[5]{9a^3b^3} \times \sqrt[5]{27a^3b^3} = \sqrt[5]{243a^6b^6}$$

$$= 3ab\sqrt[5]{b^4}.$$

Que $\sqrt[3]{a^2b^2+b^4}$ divisé par $\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{8b}}$ don-

ne pour quotient $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^3+8b^3}{a^2-b^2}} = 2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

$$\text{Que } \frac{\sqrt[3]{a^2x^3-x^4}}{\sqrt[3]{ab^4+b^4x}} = \frac{x}{b}\sqrt[3]{\frac{a-x}{b}}.$$

XVII.

Mais si l'on veut faire ces mêmes opérations sur des quantités radicales de différens signes, & qu'on ne veuille pas se contenter de la simple marque de multiplication, il faut changer ces quantités radicales en d'autres d'un radical plus composé qui soit le même pour chacune des deux quantités à multiplier ou à diviser.

Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant.

Qu'on ait, par exemple $\sqrt[3]{ab}$ & $\sqrt[3]{abb}$ à réduire à un même signe, j'éleve ab à la puissance 5, & j'écris $\sqrt[15]{}$, au lieu de $\sqrt[3]{}$, & j'ai la quantité $\sqrt[15]{a^5b^5}$ qui est la même chose que $\sqrt[3]{ab}$, j'éleve de même abb à la troisième puissance, & je mets $\sqrt[15]{}$ au lieu de $\sqrt[3]{}$; ce qui change la quantité $\sqrt[3]{abb}$ en $\sqrt[15]{a^3b^9}$. Ainsi s'il avoit fallu multiplier $\sqrt[3]{ab}$ par $\sqrt[3]{abb}$, il seroit venu pour produit $\sqrt[15]{a^8b^{12}}$; & si j'avois eu à diviser la première par la seconde, j'aurois trouvé pour quotient $\sqrt[15]{\frac{a^5b^5}{a^3b^9}} = \sqrt[15]{\frac{a^2}{b^4}}$.

Méthode pour cette réduction.

De même le produit de $\sqrt[3]{a^2 b^4}$ par $\sqrt{a^4 b^5}$ auroit été $\sqrt[6]{a^{10} b^{22}} = a^2 b^3 \sqrt[6]{a^4 b^2}$.

En général pour réduire deux quantités radicales $\sqrt[m]{a^p b^q}$ & $\sqrt[n]{a^r b^s}$ à un même signe, on changera la première en $\sqrt[mn]{a^{pn} b^{qn}}$, & la seconde en $\sqrt[mn]{a^{rm} b^{sm}}$; s'il est question alors de les multiplier, leur produit sera $\sqrt[mn]{a^{pn+rm} b^{qn+sm}}$, & si on vouloit diviser la première par la seconde, le quotient seroit $\sqrt[mn]{a^{pn-rm} b^{qn-sm}}$.

Lorsque les deux quantités radicales auront pour exposans des nombres qui auront un commun diviseur, on voit qu'il ne sera pas nécessaire de changer chaque radical en un autre, dont l'exposant soit le produit de deux premiers exposans; par exemple que l'on ait \sqrt{ab} & $\sqrt[4]{ab^3}$, on changera le premier en $\sqrt[4]{a^2 b^2}$; qu'on ait de même $\sqrt[4]{a^3}$ & $\sqrt[6]{a^4 b}$, on changera la première en $\sqrt[12]{a^9 b^3}$, & la seconde en $\sqrt[12]{a^{10} b^2}$.

XVIII.

Autre manière de faire les opérations précédentes.

On peut trouver une autre méthode pour faire les opérations précédentes, en employant une réflexion sur la nature des quantités radicales, qui suit assez naturellement de ce qu'on a dit art. VIII. pour extraire toutes sortes de

racines. C'est que les quantités radicales peuvent être regardées comme des puissances, dont les exposans sont fractionnaires.

Pour faire voir, non-seulement comment on est arrivé à cette réflexion, mais la manière dont on en a fait usage; cherchons par le moyen de ce que nous avons vu précédemment ce que peuvent être les quantités $\sqrt[m]{a^p b^q}$

& $\sqrt[n]{a^r b^s}$ employés dans l'exemple précédent.

Suivant ce qu'on a dit art. VIII. si on avoit les nombres qu'expriment les exposans p & q , on les diviserait par le nombre exprimé par m , & on prendroit leur quotient pour servir d'exposans à a & à b , & ce seroit la première

quantité exprimée $\sqrt[m]{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}}$. Mais sans sçavoir les valeurs particulières de p , q , m , il est évident qu'on peut en cette occasion, comme en toutes les autres, écrire généralement $\frac{p}{m}$ & $\frac{q}{m}$ pour les quotiens de la division de p & de q par m , c'est-à-dire pour les exposans de a & de b dans la racine m de $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$.

Donc $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$ est cette racine. De même

$\sqrt[n]{a^r b^s}$ sera $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$. Pour multiplier présentement les deux quantités $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$ &.....

$a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$, dans lesquelles sont changées les

quantités qu'on avoit à multiplier art. xvii. il faut, comme dans toutes les multiplications de quantités incomplexes, ajouter les exposans des mêmes lettres, c'est à-dire $\frac{p}{m}$ & $\frac{r}{n}$

avec $\frac{q}{m}$, ce qui donnera $a^{\frac{p}{m} + \frac{r}{n} + \frac{q}{m}}$

ou $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, en mettant les fractions $\frac{p}{m}$ & $\frac{r}{n}$ au même dénominateur aussi bien que $\frac{s}{n}$ & $\frac{q}{m}$.

Ainsi $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, c'est-à-dire le produit de a élevé à la puissance $\frac{pn+rm}{mn}$ par b élevé à la puissance $\frac{sm+qn}{mn}$ est le produit des quantités proposées.

Il est aisé de voir présentement l'identité

de cette expression $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, & de l'expression $\sqrt[mn]{a^{pn+rm} b^{sm+qn}}$ qu'on avoit trouvé dans cet article xviii. Car par la même

même raison qu'on vient de voir que $\sqrt[m]{a^p}$ & $a^{\frac{p}{m}}$ ne désignent que la même quantité, on doit voir que $a^{\frac{pn+rm}{mn}}$ & $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}}$ sont la même chose, ainsi que $\sqrt[mn]{b^{sm+qn}}$ & $b^{\frac{sm+qn}{mn}}$.

Si on avoit voulu au contraire diviser la première quantité $\sqrt[m]{a^p b^q}$ par la seconde... $\sqrt[n]{a^r b^s}$, on auroit retranché l'exposant $\frac{r}{n}$ de $\frac{p}{m}$ & l'exposant $\frac{q}{m}$ de $\frac{s}{n}$, & l'on auroit eu

$a^{\frac{p}{m} - \frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n} - \frac{q}{m}}$ ou $a^{\frac{pn-rm}{mn}} b^{\frac{sm-qn}{mn}}$ pour le quotient.

Afin qu'on se familiarise avec cette transformation de quantités radicales en puissances fractionnaires, faisons-en encore quelque application. Soit proposé, par exemple, de diviser $\sqrt[2p]{a^m b^{3n} c^2}$ par $\sqrt[p]{a^2 b^n c}$. On changera

d'abord la première quantité en $a^{\frac{m}{2p}} b^{\frac{3n}{2p}} c^{\frac{2}{2p}}$,

& la seconde en $a^{\frac{2m}{p}} b^{\frac{n}{p}} c^{\frac{1}{p}}$, ensuite on retranchera les exposants $\frac{2m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les lettres a, b, c dans la seconde, des exposants

$\frac{m}{2p}, \frac{3n}{2p}, \frac{1}{p}$ qu'ont les mêmes lettres dans la première, & les restes $\frac{1m}{2p}, \frac{n}{2p}, 0$, seront les exposans à donner aux mêmes lettres dans le quotient, c'est-à-dire que $a^{-\frac{1m}{2p}} b^{\frac{n}{2p}} c^0$ est ce quotient.

En trouvant une pareille quantité, il est naturel qu'on soit un peu embarrassé à savoir ce qu'elle signifie, car n'ayant point encore rencontré d'exposant qui soit ou zero ou négatif, on ne sait ce que deviennent les quantités dont elles sont les exposans.

Pour se tirer de cet embarras, soit reprise la question dans l'endroit où commence à paroître la difficulté, c'est-à-dire, lorsqu'on retranche les exposans $\frac{2m}{p}$ de $\frac{m}{2p}$ & $\frac{1}{p}$ de $\frac{1}{p}$ afin de diviser $a^{\frac{m}{2p}}$ par $a^{\frac{2m}{p}}$ & $c^{\frac{1}{p}}$ par $c^{\frac{1}{p}}$.

C'est donc à la place de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ qu'on met c^0 ;

& à la place de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$ qu'on met $a^{-\frac{1m}{2p}}$; mais

au lieu de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{m}{p}}}$ on peut mettre $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$ à

cause que $a^{\frac{2m}{p}}$ est le produit de $a^{\frac{3m}{2p}}$ par $a^{\frac{m}{2p}}$, & au lieu de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ on peut mettre 1.

Donc les deux quantités à examiner $a^{-\frac{3m}{2p}}$ & c^0 expriment l'une $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$, & l'autre 1. Et

partant le quotient cherché de $\sqrt[p]{a^{\frac{2p}{m}} b^{\frac{3n}{2}} c^{\frac{1}{p}}}$ divisé par $\sqrt[p]{a^{\frac{2m}{p}} b^{\frac{3n}{2}} c^{\frac{1}{p}}}$ est $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}} \times b^{\frac{n}{2p}} \times 1$ ou

$$\frac{b^{\frac{n}{2p}}}{a^{\frac{3m}{2p}}}.$$

XIX.

La nouveauté des expressions qu'on vient d'employer dans l'article précédent, & la généralité qu'elles apportent dans l'analyse mérite qu'on en fasse une courte récapitulation en les réduisant en principes généraux.

O ij

Ce que est
qu'une puis-
sance frac-
tionnaire.

1°. Lorsqu'une quantité quelconque a pour exposant une fraction, on peut la changer en la racine d'une quantité dont l'exposant sera entier, en prenant pour exposant de la racine le dénominateur de l'exposant proposé, & pour exposant de la quantité sous le signe radical le numérateur du même exposant fractionnaire, c'est-à-dire, en termes algebriques,

$$\text{qu'en général } \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Ce que c'est
qu'une puis-
sance négative.

2°. Lorsqu'une quantité a un exposant négatif, on la peut changer en une fraction dont le numérateur est l'unité, & dont le dénominateur est la même quantité avec un exposant pareil au proposé, mais avec le signe

$$+, \text{ c'est-à-dire qu'en général } a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Ce que c'est
que la puis-
sance 0.

3°. Toute quantité dont l'exposant est zero se réduit à l'unité, c'est-à-dire que $a^0 = 1$.

La démonstration de ces trois propositions prises dans leur plus grande généralité ne demande point d'autres raisonnemens que ceux qu'on a employés dans l'article précédent. Cependant pour se ressouvenir plus aisément de ces propositions, & pour s'en servir avec plus de confiance, il est à propos de les considérer à part, ce qui se fera facilement de la manière suivante.

1°. On démontrera que $a^{\frac{n}{m}}$ est la racine m de a^n , si on fait voir qu'en élevant $a^{\frac{n}{m}}$ à la

4

Case 1:

$$\begin{aligned}
 &x^4 + 12bx^3 + 21b^2x^2 + 18b^3x + 9b^4 \\
 &x^4 + 6bx^3 + 4b^2x^2 \\
 &+ 2bx + 3b^2
 \end{aligned}$$

Case 2.

Case 3

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = a^{\frac{1}{12}} b^{-\frac{4}{3}} c^{\frac{5}{12}}$$

1. The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem of the existence of solutions of the system of equations

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = h(x, y, z),$$

where f, g, h are continuous functions of x, y, z and satisfy the conditions

$$f(0, 0, 0) = g(0, 0, 0) = h(0, 0, 0) = 0,$$

and the functions f, g, h are such that

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{g(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{h(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

$$\text{The functions } f, g, h \text{ are assumed to be continuous and to satisfy the conditions}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{g(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{h(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

$$\text{The functions } f, g, h \text{ are assumed to be continuous and to satisfy the conditions}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{g(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{h(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

$$\text{The functions } f, g, h \text{ are assumed to be continuous and to satisfy the conditions}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{g(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \frac{h(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

puissance m , il vient a^n . Or pour élever $a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance m , il est évident qu'il faut multiplier son exposant par m , ce qui donnera $a^{\frac{n}{m} \times m}$ ou a^n .

2°. a^{-m} sera nécessairement égal à $\frac{1}{a^m}$, si en multipliant ces deux quantités par une même puissance de a , il vient le même produit. Or qu'on les multiplie l'un & l'autre par une puissance de a plus élevée que m par a^{1m} , par exemple, on aura $a^{2m} \times a^{-m}$ ou a^{2m-m} ou a^m pour le produit de a^{2m} par a^{-m} , & de même $a^{2m} \times \frac{1}{a^m}$ ou a^m pour le produit de a^{2m} par $\frac{1}{a^m}$, donc a^{-m} & $\frac{1}{a^m}$ sont égaux.

3°. Par la même raison a^0 & 1 sont égaux, puisqu'en les multipliant l'un & l'autre par a ,
 $0+1$
 il vient $a^{0+1} = 1a$ ou $a=a$.

Comme ces trois seules propositions suffisent pour toutes les réductions, & les transformations de même espèce que les précédentes, & pour une infinité d'autres opérations, les Commencans ne sçauroient trop s'exercer à en faire des applications. Pour leur en donner le moyen, j'ai joint plusieurs exemples dans la troisième Case de la Table ci-jointe.

XX.

Après avoir résolu toutes les difficultés

qu'on pouvoit rencontrer dans les Equations à deux termes, il est naturel qu'on ait cherché aussi à résoudre généralement toutes celles qui n'ont que trois termes, mais on est bien loin encore d'avoir trouvé une méthode générale pour toutes les Equations de cette nature; on s'est contenté de les résoudre dans quelques cas particuliers. Par exemple on a trouvé une Classe d'Equations assez étendue qui pouvoit se réduire facilement aux deux cas que nous avons déjà vûs, celui des Equations du second degré, & celui des Equations à deux termes d'un degré quelconque.

Des Equations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second degré.

Ces Equations sont toutes celles qu'on peut mettre sous cette forme générale

$x^{2m} + ax^m = b$. Pour les résoudre on ajoutera ainsi que dans les Equations du second degré ce qui manque au premier membre pour en faire un quarré, ce qui donnera $x^{2m} + ax^m + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$ dont la racine est $x^m + \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, & par conséquent $x^m = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$ qui n'est qu'une Equation à deux termes, & qui donne pour

la valeur de x , $\sqrt[m]{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$, par laquelle on résoudra toutes les Equations à trois termes dont le premier sera affecté d'une puissance d' x double de celle qui affecte le second terme, & dont le troisième sera une quantité connue, on voit par la nature de cette expression, & par ce qu'on sçait déjà sur les racines des Equations, que toutes les Equations renfermées dans la formule générale

$x^{2m} + ax^m = b$ ne peuvent pas avoir plus de quatre racines réelles, & qu'elles n'en auront que deux, lorsque m sera un nombre impair.

XXI.

Pour faire quelque application de cette méthode, supposons d'abord qu'on ait l'Equation $x^4 - b b x x = b b c c$, en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4} b^4$ quar-

Exemple de la méthode précédente.

ré de la moitié du coefficient de $x x$; on aura $x^4 = b b x x + \frac{1}{4} b^4 = \frac{1}{4} b^4 + b b c c$, dont la racine quarrée est $x x = \frac{1}{2} b b = \pm b \sqrt{\frac{1}{4} b b + c c}$ d'où l'on tire $x x = \frac{1}{2} b b \pm \sqrt{\frac{1}{4} b b + c c}$, & partant $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} b b \pm b \sqrt{\frac{1}{4} b b + c c}}$ susceptible de deux valeurs réelles & de deux imaginaires. Les deux premières sont

$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} b b \pm b \sqrt{\frac{1}{4} b b + c c}}$, les deux autres $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} b b - b \sqrt{\frac{1}{4} b b + c c}}$, nécessairement imaginaires à cause que $b \sqrt{\frac{1}{4} b b + c c}$ est plus grand que $\frac{1}{2} b b$.

XXII.

Soit ensuite l'Equation $x^6 - 2 a^2 b x^3 = a^6$; ajoutant des deux côtés $a^4 b b$ il vient $x^6 - 2 a a b x^3 + a^4 b b = a^4 b b + a^6$ dont la racine quarrée est $x^3 - a a b = a^2 \sqrt{a a + b b}$ ou $x^3 = a a b \pm a^2 \sqrt{a a + b b}$ qui donne enfin

Autre exemple.

$x = \sqrt[3]{a a b \pm a^2 \sqrt{a a + b b}}$ susceptible de deux valeurs réelles; l'une positive, l'autre né-

gative. Les quatre autres racines de la même Equation qu'on trouveroit facilement en opérant comme dans l'article III. seroient imaginaires.

XXIII.

Troisième
exemple.

Soit à présent $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx = -aabb$ en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}aabb + \frac{1}{4}b^4$, on aura $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx + \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}aabb + \frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}aabb + \frac{1}{4}b^4$, dont le second membre est aussi bien un carré que le premier. Prenant ensuite la racine carrée de part & d'autre, on a $xx - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = +\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb$ qui donne $xx = aa$ & $xx = bb$, c'est-à-dire $x = +a$ & $x = +b$ qui sont les quatre racines de l'Equation $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx = -aabb$; on auroit trouvé également ces racines par la méthode de la troisième Partie en cherchant les diviseurs commensurables,

XXIV.

Quatrième
exemple.

Soit encore l'Equation $x^4 - \overline{2gb + 4ff} \times xx = -ggbh$, on aura en ajoutant le carré de la moitié du coefficient du second terme, & en prenant ensuite la racine carrée, $x^2 - gb - 2ff = \pm 2f\sqrt{gb + ff}$ qui donne
 $x = \pm \sqrt{gb + 2ff} \pm \sqrt{gb + ff}$. Or en réfléchissant un peu sur cette quantité on découvre bien-tôt que ce qui est sous le signe radical est un carré, celui de $f \pm \sqrt{ff + gb}$;

car on voit dans le terme $2f\sqrt{gh+ff}$ le double produit de f & de $\sqrt{gh+ff}$, & dans la quantité $gh+2ff$ on voit le quarré de f & le quarré $ff+gh$ de la partie radicale.

Ainsi la valeur précédente de x se réduit, en supposant qu'on eut choisi le signe $+$ pour le premier radical, à $f + \sqrt{ff+gh}$, & en supposant qu'on eut pris le second signe $-$ du même premier radical, à $-f + \sqrt{ff+gh}$; ce sont là les quatre racines de l'Equation $x^4 - 2ghxx - 4ffxx = -gghh$.

Dans cet exemple l'habitude du calcul pouvoit facilement faire soupçonner que la quantité $gh+2ff+2f\sqrt{gh+ff}$ avoit une racine quarrée; mais il pourroit y avoir beaucoup de cas où les quantités trouvées de la même maniere seroient aussi des quarrés sans qu'on s'en doutât, il est donc à propos de chercher une méthode générale pour reconnoître ces sortes de quantités, & pour trouver leurs racines.

XXV.

Pour y parvenir, je commence par remarquer que la racine d'une quantité composée de deux parties, dont l'une est commensurable, & dont l'autre est un radical du second degré, doit être elle-même composée de deux parties, & qu'au moins l'une des deux doit être un radical.

Méthode pour trouver les racines quarrées des quantités en partie commensurables, & en partie radicales.

Cela posé, je prends $A+B$ pour exprimer en général la quantité proposée, A dési-

gnant la partie rationnelle, & B un radical quelconque du second degré, je prends ensuite $p+q$ pour exprimer la racine cherchée.

Je remarque maintenant que soit que p soit la quantité radicale, soit que ce soit q , ou que ce soit tous les deux, le quarré $p^2+2pq+q^2$ ne pourra avoir que le terme $2pq$ de radical; comparant donc ce quarré avec la quantité donnée; $2pq$ représentera B & p^2+q^2 , A , c'est-à-dire, en termes algébriques, qu'on aura pour déterminer p & q les deux Equations $p^2+q^2=A$, $2pq=B$.

On tire de la seconde $p=\frac{B}{2q}$ qui étant substituée dans la premiere donne.....

$$\frac{B^2}{4q^2} + q^2 = A \text{ ou } q^4 - Aq^2 = -\frac{B^2}{4} \text{ ou ..}$$

$$q^2 - \frac{1}{2}A = \pm \frac{1}{2}\sqrt{AA-BB}, \text{ \& partant}$$

$$q = \pm \sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}. \text{ Substituant ensuite cette valeur de } q \text{ dans l'Equation}$$

$$p^2+q^2=A \text{ ou } p = \pm \sqrt{A-q^2} \text{ on a}$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}, \text{ donc la racine cherchée de la quantité } A+B \text{ est$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}} + \sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}} \text{ ou simplement$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}} + \sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}.$$

Car il est évident que cette expression revient absolument au même que l'expression

$\pm \sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$
 qu'on auroit en prenant en $-$ le signe de
 $\sqrt{A^2 - B^2}$.

Quant aux signes que doivent avoir les deux parties

$\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$
 de la racine cherchée de $A+B$, ils doivent
 être les mêmes, si le radical B est positif &
 contraire, si B est négatif, car il est aisé de
 voir qu'en général $p+q$ ou $-p-q$ étant la
 racine de $A+B=pp+qq+2pq$, $p-q$ ou
 $-p+q$ est celle de $A-B=pp+qq-2pq$.

XXVI.

Par la valeur qu'on vient de trouver pour
 la racine de la quantité $A+B$, on pourroit
 craindre de tomber dans une difficulté pareille
 à celle qu'on avoit d'abord à résoudre. Car

$\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$
 semblent au premier coup d'œil désigner des
 racines de quantités en parties rationnelles, &
 en parties irrationnelles, & si cela étoit la diffi-
 culté seroit restée au même point. Il faut
 donc pour que la méthode soit de quelque
 utilité, que la quantité $A-B^2$ qui se trouve
 sous le signe radical, soit un quarré commensu-
 rable. Or c'est ce qui ne sçauroit manquer
 d'arriver toutes les fois que $A+B$ sera dans
 le cas d'avoir une racine. Pour s'en assurer, il

suffit de se ressouvenir (article xxv) que $p - q$ est $\sqrt{A - B}$ en même - tems que $p + q$ est $\sqrt{A + B}$, car on en tirera tout de suite que $\sqrt{A - B} \times \sqrt{A + B}$ ou $\sqrt{AA - BB}$ est $p - q \times p + q$ ou $pp - qq$, c'est-à-dire une quantité commensurable.

XXVII.

Application
de la métho-
de précéden-
te à un exem-
ple.

Pour montrer présentement l'application de la méthode précédente, soit pris pour exemple la quantité $aa + 2c\sqrt{aa - cc}$ en la comparant avec $A + B$, on a $a^2 = A$ & $B = 2c\sqrt{aa - cc}$, & par conséquent $\sqrt{A^2 - B^2} = aa - 2cc$ d'où l'on tire $\sqrt{\frac{1}{2}A} + \frac{1}{2}\sqrt{A - B^2} = \sqrt{aa - cc}$, & de même $\frac{1}{2}\sqrt{A} - \frac{1}{2}\sqrt{A - B^2} = c$; c'est-à-dire que la racine cherchée est $c + \sqrt{aa - cc}$ ou $-c - \sqrt{aa - cc}$.

XXVIII.

Autre
exemple.

Si on avoit à prendre la racine quarrée de $16 + 6\sqrt{7}$, en faisant $A = 16$ & $B = 6\sqrt{7}$ on auroit $\sqrt{AA - BB} = 2$, & partant $\sqrt{\frac{1}{2}A} + \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}$ seroit 3 & $\sqrt{\frac{1}{2}A} - \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}$ seroit $\sqrt{7}$, d'où $3 + \sqrt{7}$ ou $-3 - \sqrt{7}$ seroit la racine cherchée.

XXIX.

Soit maintenant la quantité

$$ap - 2a\sqrt{ap - aa}. \text{ Faisant } A = ap \text{ \& } \\ B = -2a\sqrt{ap - aa} \text{ on a } \sqrt{AA - BB} \\ = ap - 2aa \text{ \& } \sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}} \\ = \sqrt{ap - aa}, \text{ \& de même } \sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}} \\ = a, \text{ c'est-à-dire que la racine cherchée sera } \\ \sqrt{ap - aa} = a \text{ ou } a = \sqrt{ap - aa}.$$

XXX.

Si la quantité proposée est $b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2$ Troisième exemple.
 $+ 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$; on aura $A = b^2 - ab + \frac{1}{4}aa$, $B = 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$, &
 $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{b^4 - 6ab^3 + \frac{19}{2}a^2b^2 - \frac{3}{2}a^3b + \frac{1}{16}a^4}$
 $= bb - 3ab + \frac{1}{4}aa$, ce qui donnera
 $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$
 & $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{ab}$ d'où la racine
 cherchée est $\sqrt{ab} + \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$ ou
 $= \sqrt{ab} + \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$. Cet exemple
 est plus propre que les précédens à faire voir la
 nécessité de sçavoir prendre la racine des quan-
 tités en parties rationnelles & en parties irra-
 tionnelles. Car dans les cas précédens la raci-
 ne cherchée ne contenant qu'un radical pou-
 voit être tirée d'une Equation du second degré

qui auroit été contenue dans l'Equation pour la résolution de laquelle on avoit cherché à prendre cette racine. Au lieu que dans ce dernier la valeur de la racine cherchée contenant deux radicaux, il étoit impossible qu'elle vint d'aucune Equation du second degré. En effet, lorsque nous avons eu à prendre (art. xxvii) la racine de $aa + 2c\sqrt{aa - cc}$, c'étoit la même chose que si on avoit dû résoudre l'Equation $x^4 - 2aax - 4aacc + 4c^4 + a^4$ de laquelle on pouvoit tirer par la III^{ème} Partie art. xxxvi. les Equations $xx - 2cx + 2cc - aa = 0$ & $xx + 2cx + cc - aa = 0$, au lieu que la racine quarrée de $\dots b^2 - ab + \frac{1}{4}aa + \sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$ devoit servir à la résolution de $x^4 + 2xab - bb - \frac{1}{4}aa \times x^2 + \frac{19}{2}a^2b^2 - 6ab^3 - \frac{1}{2}a^3b + b^4 + \frac{1}{16}a^4 = 0$ qui n'est point décomposable en deux Equations du second degré.

X X X I.

Après avoir appris à distinguer parmi les quantités qui sont en partie rationnelles, & en partie irrationnelles, celles qui sont des quarrés, on a dû chercher à distinguer aussi celles qui sont des cubes ou d'autres puissances plus élevées, puisque cela étoit nécessaire pour avoir complètement tout ce qui regarde les Equations comprises sous la forme $x^{2m} + ax^m = b$ ou $x^m = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$. Voyons d'abord ce que l'on pouvoit faire pour le cas où $m=3$,

c'est-à-dire pour trouver la racine cube d'une quantité quelconque $A + B$, dans laquelle A est rationnel, & B un radical du second degré.

Nous remarquerons d'abord que la racine cube d'une quantité de cette nature, ne peut pas renfermer plus d'un radical du second degré; car on voit bien que le cube d'une quantité qui contiendrait deux de ces radicaux, telle que $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ donneroit au moins deux radicaux.

Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables.

Nous remarquerons ensuite que la même racine cube cherchée ne pourra pas contenir d'autre espèce de radicaux, à moins que ce ne soit un radical cube, & qu'il ne soit commun aux deux parties de la racine, telle que seroit la quantité $f\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{g} \times \sqrt{m}$ dont le cube $m f^3 + 3 m f g + 3 m f \sqrt{g} + m g \sqrt{g}$, ainsi que la quantité proposée $A + B$, a une partie commensurable, & une partie radicale du second degré.

Cela posé, soit pris $p + q$ pour exprimer la racine cherchée, q étant la partie affectée du radical du second degré, soit qu'il soit d'ailleurs ainsi que p affecté d'un radical cube, soit qu'ils ne le soient ni l'un ni l'autre.

Il est évident que le cube $p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$ ne contiendra pas d'autre radical que le radical du second degré qui est dans q , & qu'il n'y aura que les termes $3ppq$ & q^3 qui soient affectés de ce radical. On comparera donc ces deux termes à la quantité donnée B , & les deux autres à A ; ce qui donnera les

Equations $A = p^3 + 3pq^2$ & $B = 3p^2q + q^3$.

Pour résoudre ces deux Equations, il faut d'abord commencer par chasser l'une des deux inconnues p ou q , ce qui se peut faire aisément par les principes établis dans la seconde Partie, art. xxxiii. Mais on peut abréger le calcul par le secours d'une remarque qui a dû se présenter facilement à des Algébristes un peu exercés, c'est que $A - B$ sera toujours le cube de $p - q$, lorsque $A + B$ sera le cube de $p + q$. Car $p + q$ étant la racine cube de $p^3 + 3pq^2 + 3p^2q + q^3$, dont la première partie $p^3 + 3pq^2$ est A , & la seconde $3p^2q + q^3$ est B , $p - q$ est nécessairement la racine cube de $A - B$ qui est alors $p^3 + 3pq^2 - 3p^2q - q^3$;

& par conséquent $p - q$ ou $p - q \times \sqrt[3]{A + B}$ est $\sqrt[3]{A - B}$, c'est-à-dire $\sqrt[3]{A - B}$.

Cela posé, on a donc l'Equation $\sqrt[3]{A - B} = p - q$ ou $n = p - q$, dans laquelle n est donnée, & ne peut être qu'une quantité commensurable ou un simple radical cube.

De l'Equation $n = p - q$ ou $q = p - n$, & de l'Equation $A = p^3 + 3pq^2$, on tire tout de suite $4p^3 - 3pn - A = 0$, Equation qu'il faut résoudre pour avoir la première partie p de la racine cube cherchée. Aussi-tôt qu'elle sera résolue, on aura la seconde partie de cette même racine cube cherchée en employant l'Equation

$$q = \sqrt[3]{p^3 - n^3}.$$

Quant au signe radical il sera positif, si le radical de la proposée a le signe $+$, & de même

même négatif si le radical de la proposée a le signe —. Car on voit aisément que la partie radicale du cube de $p + q$, laquelle est $3pp + qq \times q$ sera toujours du même signe que q .

Si la racine de la quantité proposée $A + B$ ne doit point avoir de radical cube qui affecte tous les termes, n ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2}$ sera une quantité commensurable, & par conséquent l'Equation $4p^3 - 3pn - A$ ne contiendra pas de radicaux, & comme p sera alors commensurable, on ne pourra pas manquer de le trouver en cherchant tous les diviseurs de cette Equation par la méthode donnée dans la III^{ème} Partie art. xxxii.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux parties affectées d'un radical cube, ce qu'on aura reconnu en ne trouvant point un cube parfait pour $A^2 - B^2$, on verra quelle est la quantité par laquelle il faudroit multiplier la quantité proposée pour en former une nouvelle dont les deux parties étant prises pour A & pour B donneroient pour $AA - BB$ un cube parfait. Trouvant alors la racine cube de cette nouvelle quantité substituée à la proposée, il ne faudroit plus que la diviser par la racine cube du multiplicateur dont on se seroit servi, & l'on auroit la racine cherchée.

Quant à la détermination de ce multiplicateur, elle sera facile en remarquant que la question est la même que si on se proposoit de trouver la quantité quarrée, par laquelle

il faudroit multiplier la quantité qu'on a trouvé d'abord pour $AA - BB$ afin d'en faire un cube parfait ; car il est clair que la racine quarrée de ce multiplicateur de $AA - BB$ seroit le multiplicateur qu'on devoit donner aux quantités proposées A & B .

XXXII.

Application
de la métho-
de précédén-
te à un ex-
emple.

Pour montrer l'application de cette méthode, supposons qu'on cherche la racine cube de la

quantité $7a^3 - 3a^2b + 5aa - ab \sqrt{2aa - ab}$.

Par la comparaison de cette quantité avec $A + B$ j'ai $7a^3 - 3a^2b = A$;

$5aa - ab \sqrt{2aa - ab} = B$, & partant $A^3 - B^3 = a^6 + 3a^2b - 3a^2b^2 + a^2b^3$, & n ou

$\sqrt[3]{A^3 - B^3} = aa + ab$. Substituant cette valeur de n , ainsi que celle de A dans l'Equation $4p^3 - 3pn - A = 0$, j'ai $4p^3 + 3paa - 3pab - 7a^3 + 3a^2b$ dont il est question de trouver un diviseur d'une dimension. On trouvera facilement par la méthode enseignée dans la III^{ème} Partie, article xxxii. que ce diviseur est $p = a$, c'est-à-dire que la valeur de p est a . Substituant cette valeur de p dans l'Equation $q = \sqrt{pp - n}$, il vient $q = \sqrt{2aa - ab}$.

Donc la racine cherchée est $a + \sqrt{2aa - ab}$.

XXXIII.

Autre exem-
ple.

Soit présentement proposé de prendre la

racine cube de $2aac - abc - bbc - 2a - b$

$\sqrt{aacc - bbcc}$, je commence par faire $2aac - abc - bbc = A$ & $B = 2a - b$

$\sqrt{aacc - bbcc}$, ce qui me donne $A^2 - B^2 = 2b^2cc - 2ab^2cc$ qui n'est point un cube.

Pour sçavoir ce qui peut le rendre cube, je le décompose en ses produisans, & il devient $2xccc \times b - axb^2$; d'où je découvre aisément

qu'en le multipliant par $4 \times b - a$ qui est une

quantité quarrée, j'aurai un cube parfait, celui de $2 \times b - a \times b$ ou de $2bb - 2ab$; & par conséquent que si on multiplie la quantité proposée par $\frac{2b - a}{4}$ racine du quarré

$\frac{4 \times b - a}{4}$, on aura une nouvelle quantité . . .

$2aa - ab - bb \times 2b - 2a - 2a - b \times 2b - 2a$

$\sqrt{aa - bb}$, dont la premiere partie représentant A , & la seconde B donnera pour

$\sqrt{AA - BB}$, c'est-à-dire pour n , $2bb - 2ab$.

Je suppose donc que l'on m'eût en effet donné ces quantités pour A & pour B , & que j'en eusse tiré cette valeur de n . Dans ce cas l'Equation $4p^3 - 3pn - A$ donneroit $4p^3 - 3p$

$\times 2bb - 2ab + bb + ab - 2aa \times 2b - 2a = 0$,

à laquelle on trouveroit par la méthode donnée dans la III^{ème} Partie, article XXXI. le diviseur $p + a - b$, c'est-à-dire que la valeur de p seroit alors $b - a$; la substituant dans

$q = \sqrt{pp - n}$ on auroit $q = \sqrt{aa - bb}$, donc
 $b - a - \sqrt{aa - bb}$ seroit la racine cube de la
 nouvelle quantité, ou ce qui revient au mê-
 me du produit de la quantité proposée par
 $\frac{2b - 2a}{c}$. Donc $\frac{b - a - \sqrt{aa - bb} \times \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{2b - 2a}}$ est la racine

cube cherchée de la quantité proposée.

Dans cet exemple & dans tous ceux où la
 racine cherchée se trouvera affectée de radi-
 caux cubes, il est clair qu'on ne sçauroit, pour
 se dispenser d'employer la méthode précéden-
 te, avoir recours à la méthode de la III^{ème}
 Partie, article xxxvi. c'est-à-dire qu'on ne
 pourra trouver aucun diviseur dans l'Equa-
 tion dont la solution auroit conduit à don-
 ner pour valeur d' x la racine cube cherchée.
 En effet il est aisé de voir que l'Equation ..

$$x^6 - 2x^3 \times 2aac - abc - b^2c + 2b^4cc \\
- 2ab^3cc \text{ qui auroit donné } \dots\dots\dots x \\
= \sqrt[3]{2aac - abc - b^2c - 2a - b \sqrt{aacc - bbcc}} \\
\text{n'auroit point été décomposable.}$$

Mais dans tous les cas où la racine cherchée
 doit être simplement composée d'un terme ra-
 tionnel & d'un irrationnel du second degré, on
 parviendroit toujours à trouver cette racine en
 décomposant l'Equation dont la solution au-
 roit conduit à chercher la racine cube de la quan-
 tité proposée. Dans l'article xxxii. par exem-
 ple, où il étoit question de réduire l'expres-

fon $x = \sqrt[3]{7a^3 - 3a^2b + 5aa - ab\sqrt{2aa - ab}}$
 on auroit pû trouver dans l'Equation

$x^6 + 6a \cdot b - 14a^2 \times x - a^6 + 3a^2b - 3a^4b^2$
 $+ a^2b^3 = 0$ d'où seroit venue cette valeur de
 x , une Equation du second degré $xx - 2ax$
 $+ ab - aa = 0$ qui auroit donné la même va-
 leur de x .

XXXIV.

Si les termes de la quantité dont on vou-
 dra prendre la racine cube ont des diviseurs ,
 on commencera par les mettre tous au même
 dénominateur , & on divisera ensuite la racine
 cube du numérateur par celle du denomina-
 teur.

XXXV.

Lorsque la quantité proposée en partie com-
 mensurable & en partie incommensurable sera
 seulement numérique , on pourra trouver la
 racine cube plus aisément que par la méthode
 précédente.

Méthode
 pour trouver
 les racines
 cubes des
 quantités nu-
 mériques en
 partie com-
 mensurables,
 &c.

Car, supposant d'abord que la racine cher-
 chée ne doive point avoir de radical cube,
 mais qu'elle soit composée d'un nombre en-
 tier & d'une partie radicale simple & entiere
 aussi, on tire de ce que $p - q$ est $\sqrt[3]{A - B}$
 lorsque $p + q$ est $\sqrt[3]{A + B}$ ou ce qui revient
 au même de ce que $p = \frac{\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B}}{2}$

une maniere simple d'avoir la partie commensurable de la racine cherchée, il ne faut pour cela que calculer en nombres entiers les plus

proches les quantités $\sqrt[3]{A - B}$ & $\sqrt[3]{A + B}$, & prendre ensuite la moitié de ces deux nombres pour avoir la valeur exacte de p . Car en prenant pour $\sqrt[3]{A - B}$ & pour $\sqrt[3]{A + B}$ les nombres entiers qui en approchent le plus, l'erreur qu'on peut commettre sur chacune de ces quantités ne sçauroit être de $\frac{1}{2}$, & par conséquent il ne peut pas arriver que le nombre entier qui en résulte pour $\frac{\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B}}{2}$,

c'est-à-dire pour p , diffère d'une unité de la vraie valeur de p , & comme cette vraie valeur de p doit être un nombre entier, elle sera donc exactement déterminée par ce moyen.

Ayant ainsi la valeur de p , & sçachant déjà celle de n ou de $\sqrt[3]{AA - BB}$, on substituera, comme dans la méthode précédente les valeurs de p & de n dans $q = \sqrt[3]{pp - n}$, & l'on aura la seconde partie de la racine cube cherchée.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux termes affectés d'un même radical cube, ce qu'on aura reconnu en remarquant que $A^3 - B^3$ n'étoit pas un cube parfait; il faudra en suivant la même méthode que celle qu'on a employée dans les quantités littérales, chercher le nombre par lequel on devoit multiplier $A + B$ afin que $AA - BB$ fut un cube parfait:

& ayant trouvé la racine de la nouvelle quantité que devient $A+B$ par cette multiplication, on n'aura qu'à la diviser par la racine cube du nombre dont on s'est servi pour multiplier $A+B$, & le quotient sera la racine cherchée.

XXXVI.

Supposons, pour montrer l'application de cette méthode, qu'on cherche la racine cube de $7+5\sqrt{2}$. Ayant fait $A=7$, $B=5\sqrt{2}$, je trouve que n ou $\sqrt[3]{A^2-B^2} = -1$. Je remarque ensuite que la valeur de $\sqrt[3]{A+B}$ ou de $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ est plus proche de 2 que de 3, ainsi je prends 2 pour l'exprimer; remarquant de même que celle de $\sqrt[3]{A-B}$ ou de $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ est entre 0 & 1, mais plus proche de 0, je prends 0 pour cette quantité, & j'ai par ce moyen p ou $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2} = 1$. Je substitue alors cette valeur de p dans $q = \sqrt{pp-n}$, & j'ai $q = \sqrt{1}$, d'où je conclus que si la quantité proposée $7+5\sqrt{2}$ a une racine cube, elle est $1+\sqrt{2}$, en effet cubant $1+\sqrt{2}$ il vient $7+5\sqrt{2}$.

Application de la méthode précédente à un exemple.

XXXVII.

Supposons présentement qu'on eut à prendre la racine cube de $5+3\sqrt{3}$; on trouve-

Autre exemple.

roit alors $AA - BB = -2$, or 2 n'étant point cube il faut chercher le nombre par lequel il auroit fallu multiplier $5 + 3\sqrt{3}$ pour que $AA - BB$ eut été cube, ou ce qui revient au même il faut chercher le nombre le plus simple par le quarré duquel $AA - BB$, c'est-à-dire 2, étant multiplié on aura un cube. Or on voit tout de suite que 2 est lui-même ce nombre. Supposons donc que l'on se fut proposé de trouver la racine cube de $10 + 6\sqrt{3}$. On

auroit eu alors $n = -2$ & $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$

ou $\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}}{2}$ auroit été 1 en

nombre entier le plus proche. Je substitue donc ces valeurs de p & de n dans $q = \sqrt{pp - n}$, & j'ai $q = \sqrt{3}$. J'examine maintenant si $p + q$ ou $1 + \sqrt{3}$ est la racine cube de $10 + 6\sqrt{3}$, & je trouve qu'elle l'est en effet. D'où je conclus que $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ est la racine cube cherchée de $5 + 3\sqrt{3}$.

XXXVIII.

Simplification
de la métho-
de précéden-
te.

On simplifiera le calcul d'approximation par lequel on détermine p , en remarquant qu'au

lieu de $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, on peut écrire...

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2} \text{ à cause que } n \text{ ou } \sqrt[3]{AA - BB}$$

$\equiv \sqrt[3]{A-B} \times \sqrt[3]{A+B}$. Or cette expression est en effet plus simple que $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$ parce qu'il est plus aisé de diviser par $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre n , qui est supposé déjà trouvé, que de calculer séparément $\sqrt[3]{A-B}$.

XXXIX.

Pour montrer l'usage de cette nouvelle formule ; appliquons-la à l'exemple de l'article xxxvi. ou A étoit $= 7$, & $B = 5\sqrt{2}$; après avoir trouvé de même que dans cet article que

Application
de la nouvel-
le méthode.

$n = 1$ & que $\sqrt[3]{A+B}$ en nombres entiers les plus proches étoit 2, au lieu de chercher comme dans le même article la racine cube approchée de $7 - 5\sqrt{2}$, je divise n ou 1 par la valeur 2 de $\sqrt[3]{A+B}$ ce qui me donne $\frac{1}{2}$ que je substitue dans la formule précédente

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}, \text{ \& j'ai } \frac{1}{2} \text{ ou } 1 \text{ (pre-}$$

nant le nombre entier le plus proche) pour la valeur de p , ainsi qu'on l'avoit trouvé dans cet article par la formule $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, le reste s'achèveroit de même.

Cette nouvelle méthode pourroit être fautive dans les cas où A & B sont de signes différens.

Il est à remarquer cependant que cette nouvelle formule pourroit induire en erreur si A & B n'étoient pas de même signe, car dans les cas où ces quantités seroient des signes différens, la vraie valeur de $\sqrt[3]{A+B}$ pourroit être si petite auprès de n , que le nombre entier le plus proche qu'on prend à la place de

$$\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}$$

cette valeur donneroit pour

un nombre qui différoit du vrai d'une ou de plusieurs unités. Qu'on eut, par exemple, à prendre la racine cube de $45 - 29\sqrt{2}$ en faisant $A = 45$ & $B = -29\sqrt{2}$, on auroit 1 pour le nombre entier le plus proche de... $\sqrt[3]{A+B}$ ou $\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ & comme.... $\sqrt[3]{AA - BB}$ seroit alors 7, p ou,

$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ seroit en ce cas trouvé égal à 4, quoi qu'il ne fût réellement que 3, ainsi qu'on peut voir par l'expression

$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$ de la méthode précédente.

Ce qu'il faut faire en ce cas.

Mais pourvu que cette nouvelle méthode d'avoir p , soit d'un usage sûr toutes les fois

que A & B sont de même signe, il importe peu qu'elle s'applique aux cas où ces quantités sont de signes différens. Car on voit bien que dans ces cas on n'a qu'à commencer par supposer A & B tous deux positifs, & en prendre la racine $p+q$. Ensuite faire p du même signe que A , & q du même signe que B .

Il ne s'agit donc plus que de s'assurer si toutes les fois que A & B sont de même signe, ou ce qui revient au même si A & B étant tous deux positifs, on peut, sans craindre d'erreur, substi-

tuer dans $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ à la place de

$\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Pour nous en convaincre, commençons par supposer, ce qui ne peut jamais aller si loin, qu'on se trompât de $\frac{1}{2}$ en prenant pour $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Dans ce cas la quantité qu'on trouveroit au lieu de p seroit..

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2}}}{2}.$$

Pour faire

voir que cette expression ne sçauroit donner un nombre qui differe d'une unité de la vraie valeur de p , mettons dans cette quantité $p+q$ au lieu de $\sqrt[3]{A+B}$, & $pp-qq$ au lieu de n , elle deviendra $p+q \pm \frac{1}{2} + \frac{pp-qq}{p+q \pm \frac{1}{2}}$ de laquelle

retranchant p on tire en réduisant $\frac{+q+1}{2p+2q+1}$
 pour l'erreur que peut apporter, dans la détermination de p , le choix qu'on a fait du nombre entier au lieu de $\sqrt{A+B}$. Or il est clair que cette quantité ne sçauroit jamais égaler $\frac{1}{2}$, car dans la premiere expression $\frac{q+\frac{1}{4}}{2p+2q+1}$ qu'elle renferme, le numérateur $q+\frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q+1$, est à plus forte raison plus petit que la moitié de $2p+2q+1$: & dans la seconde expression $\frac{-q+\frac{1}{4}}{2p+2q-1}$ qu'elle renferme encore, le numérateur $-q+\frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q$ est par conséquent plus petit aussi que la moitié de $2q+2p-1$.

Ainsi on ne sçauroit se tromper d'une unité en déterminant p par la méthode précédente, & par conséquent toutes les fois qu'une quantité comme $A+B$, dans laquelle il n'entrera, soit sous le signe radical, soit devant ce signe, aucun nombre fractionnaire devra avoir une racine cube $p+q$, dans laquelle il n'y ait aussi aucun nombre fractionnaire, on trouvera cette racine par la méthode précédente.

X L I.

Cas où la méthode précédente pourroit induire dans l'erreur.

Mais si la quantité $A+B$, quoique ne contenant que des nombres entiers, soit dehors, soit dessous le signe radical, doit avoir une racine cube qui contient des nombres fractionnaires, telle que la quantité $2+\sqrt{5}$ dont la

racine cube est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ la méthode précédente aussi-bien que celle de l'art. xxxv. ne donneroit rien alors, & jetteroit dans l'erreur en faisant croire qu'il n'y auroit point de racine cube à espérer.

Pour remédier à cet inconvenient, il faut commencer par chercher directement quelles sont toutes les especes de racines fractionnaires dont les cubes pourroient être des nombres entiers. Moyen de s'en garantir.

Pour les trouver soient représentées toutes ces racines par $\frac{p}{m} + \frac{q}{n}$, p & m étant supposés des nombres entiers qui n'ont aucun commun diviseur, q la racine d'un nombre en entier qui ne permet aucune réduction avec le nombre n . En élevant cette quantité au cube on aura $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pq^2}{mn^2}$ pour la partie rationnelle ; &

$\frac{3pp}{nmn} + \frac{qq}{n^3} \times q$ pour la partie incommensurable :

De plus par les conditions du Problème que nous cherchons à résoudre, tant la première quantité $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pq^2}{mn^2}$, que le coefficient

$\frac{3pp}{nmn} + \frac{qq}{n^3}$ de la seconde doivent être des nombres entiers.

Soit d'abord égalé $\frac{3p^3}{nmn} + \frac{qq}{n^3}$ à b que je suppose exprimer un nombre entier. On aura

quantité par 8, & chercher par la même méthode la racine cube de la nouvelle quantité qu'on aura par cette multiplication, & si on ne réussit pas, on sera sûr que la quantité proposée n'étoit pas un cube, si on réussit la moitié de la racine cube qu'on aura alors, sera celle qu'on cherchoit.

XLII.

Lorsque le nombre A & le radical B seront fractionnaires, il est clair qu'il faudra ainsi que dans l'article xxxiv. mettre A & B au même dénominateur, puis diviser la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XLIII.

Si on proposoit de prendre la racine cube d'une quantité composée de deux radicaux du second degré, soit que cette quantité fut numérique ou qu'elle fut littérale, il n'y auroit qu'à la multiplier par le cube de l'un des radicaux que contiendrait cette quantité. Le produit étant alors dans le cas des quantités qu'on vient de traiter, on en prendroit la racine cube de la même manière, & on la diviseroit par le radical dont le cube auroit servi de multiplicateur à la proposée.

Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux.

XLIV.

Lorsqu'on voudra prendre la racine quatrième d'une quantité comme $A + B$, on n'aura d'abord qu'à en chercher la racine quarrée, car

Comment on prend la racine quatrième des quantités de

même espe-
ce que les
précédentes.

si on n'en trouve pas , à plus forte raison n'en trouvera-t'on pas de racine quatrième ou quarrée quarrée. Si on en trouve une , il ne sera plus question que de trouver la racine quarrée de la quantité que la premiere extraction aura donnée.

X L V.

Ce qu'il faut
faire toutes
les fois que
l'exposant
de la racine
est pair.

Il en sera de même toutes les fois qu'on aura une racine à prendre dont l'exposant sera pair, il faudra commencer par la racine quarrée , & le Problème sera réduit à prendre une racine d'un exposant sous-double du premier.

X L V I.

Pour les ra-
cines cin-
quièmes.

Si on vouloit la racine cinquième d'une quantité $A+B$ telle que les précédentes , il faudroit suivre une methode semblable à celle qu'on a suivie pour la racine cube. Au lieu des deux théorèmes, par lesquels on apprenoit que

$$p = \frac{\sqrt[5]{A+B} + \sqrt[5]{A-B}}{2}, \text{ \& que } \sqrt[5]{A^2-B^2}$$

$$= p^2 - q^2, \text{ on auroit ceux-ci } \dots\dots\dots$$

$$p = \frac{\sqrt[5]{A+B} + \sqrt[5]{A-B}}{2} \text{ \& } \sqrt[5]{A^2-B^2} = p^2 - q^2$$

dont on feroit le même usage que des précédens.

X L V I I.

Il en seroit de même pour les racines plus élevées. Que m soit l'exposant de la racine qu'on

qu'on se propose de prendre de $A+B$; on

aura ces deux théorèmes $p = \frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2}$

& $\sqrt[m]{A^2-B^2} = p^2 - q^2$, qu'on emploiera encore de la même manière que dans les racines cubes.

Pour démontrer ces théorèmes en général, il ne sera question que de faire voir que si $A+B$ est la puissance m de $p+q$, $A-B$ sera celle de $p-q$, car il suivra de là nécessairement que $\sqrt[m]{A+B} \times \sqrt[m]{A-B}$ sera $p+q \times p-q$ ou $pp-qq$, & que

$\frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2}$ sera $\frac{p+q+p-q}{2}$ ou p .

Quant à la démonstration de ce que $A-B$ est la puissance m de $p-q$, lorsque $A+B$ est celle de $p+q$, elle seroit aisée à trouver si on vouloit y arriver par l'induction. Car en donnant successivement différentes valeurs particulières à m , & reconnoissant la vérité de ce théorème dans chaque cas particulier, on en concluroit la vérité en général. Mais on sent bien qu'on ne sçauroit se contenter d'une pareille manière de démontrer, qu'au cas que l'on ne pût pas trouver une expression générale pour la puissance m de $p+q$, & pour celle de $p-q$, il faut donc chercher cette expression générale, qui d'ailleurs doit exciter la curiosité de tous les Analystes.

De la ma-
niere d'éle-
ver un bino-
me à une
puissance
quelconque.

Pour parvenir à trouver la valeur générale

de $p+q$ ou de $p+q$ multiplié par lui-même autant de fois moins une que l'unité est contenue dans m , commençons par chercher dans ce que nous avons vû précédemment ce qui peut avoir du rapport avec cette opération. Reprenons dans cette vûe ce que nous avons dit dans la III^{me} Partie article II. où nous avons formé une Equation par le produit de ses racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. & où nous avons trouvé la loi suivant laquelle devoient être composés tous les termes de ce produit, il est aisé de voir que tout ce que nous avons dit alors pourra s'appliquer au cas présent, en supposant que toutes les racines sont égales. Or ce que nous avons dit III^{me} Partie article III. sur l'Equation dont les racines sont $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. consistoit en ceci.

1°. Que le premier terme de cette Equation étoit composé de x élevé à une puissance égale au nombre des racines.

2°. Que le second terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre d'une unité, & ayant pour coefficient la somme des racines.

3°. Que le troisième terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre de deux unités, & ayant pour coefficient la somme de tous les produits des racines prises deux à deux.

4°. Que le quatrième terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre de trois unités, & ayant pour coefficient la somme de tous les produits des racines prises trois à trois, &

ainsi des autres termes.

Si on applique donc ces remarques dans le cas présent où toutes les racines sont égales, & où leur nombre est exprimé généralement par m , on verra

Que le premier terme sera x^m ;

Que le second sera x^{m-1} multiplié par ma , puisque toutes les racines sont égales à a , & que leur nombre est m ;

Que le troisième terme sera x^{m-2} avec un coefficient égal à a^2 , pris autant de fois qu'il y aura de rectangles ab, ac, bc , &c. dans le coefficient du troisième terme de l'Equation donnée par le produit des racines $x+a, x+b$, &c. dont le nombre est supposé m ; puisque tous les produits ab, ac, bc , &c. doivent tous être égaux chacun à a^2 , lorsque b, c , &c. sont égaux à a ;

Que le quatrième terme sera x^{m-3} avec un coefficient égal à a^3 ; pris autant de fois qu'il y aura de produits abc, abd, acd, bcd , &c. dans le coefficient du quatrième terme de l'Equation dont le nombre des racines $x+a, x+b, x+c$, &c. est m , & ainsi des autres termes.

La question est donc réduite maintenant à sçavoir ce qu'un nombre m de lettres peut donner de produits ab, ac, bc , &c. prises deux à deux ; de produits abc, abd, bcd, acd , &c. prises trois à trois ; de produits $abcd, abde, abce, acde, bcde$, &c. prises quatre à quatre,

Q ij

&c. Car en supposant que ces nombres soient trouvés , & qu'on les exprime par $A, B, C,$

$$D, \&c. \dots x^m + m a x^{m-1} + A a x^{m-2} + B a x^{m-3} + C a x^{m-4} + D a x^{m-5} + \dots$$

&c. fera la valeur cherchée de $x + a$.

Pour trouver premièrement ce qu'un nombre m de lettres $a, b, c, \&c.$ peut donner de produits de deux lettres $ab, ac, bc, \&c.$ en les combinant de toutes les manières possibles; commençons par remarquer que lorsqu'on aura formé tous ces produits, on aura écrit deux fois plus de lettres que de termes.

Remarquons ensuite que chacune des lettres $a, b, c, \&c.$ doit être répétée le même nombre de fois, & que chacune ne pouvant être multipliée que par toutes les autres, & non par elle-même, ne sçauroit être répétée que $m-1$ de fois, donc le nombre de lettres à écrire en formant tous ces produits doit être $m \times m-1$, donc le nombre de tous ces pro-

duits doit être $\frac{m \times m-1}{2}$, & c'est-là la valeur de A ou du coefficient du troisième terme de la formule cherchée.

Quant au coefficient du quatrième terme, c'est-à-dire au nombre de produits à trois lettres $abc, abd, acd, bcd, \&c.$ que peuvent donner un nombre m de lettres $a, b, c, d, \&c.$ prises de toutes les manières possibles trois à trois, pour le trouver, nous remarquerons d'a-

bord que ce nombre doit être le tiers de celui des lettres qu'on écrit en formant tous ces produits.

Nous remarquerons ensuite que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, & que ce nombre doit être celui qui exprime combien de produits de deux lettres doivent donner toutes les autres lettres. Car il est évident que chaque lettre, *a* par exemple, doit être jointe à tous les produits *bc*, *bd*, *cd*, &c. des autres lettres prises deux à deux.

Le nombre de fois que chacune des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. doit être répétée est donc celui qu'un nombre $m-1$ de lettres *b*, *c*, *d*, &c. donne de produits de deux lettres. Mais on vient de voir que lorsque le nombre des lettres étoit m , le nombre de leurs produits deux à deux étoit la moitié du nombre m multipliée par le nombre $m-1$ qui est moindre d'une unité, donc lorsque le nombre des lettres est $m-1$, il faut

encore prendre la moitié $\frac{m-1}{2}$ de ce nombre, & la multiplier par $m-2$ qui est moindre d'une unité que $m-1$. C'est-à-dire que

$\frac{m-1 \times m-2}{2}$ est le nombre de fois que chacune des lettres *a*, *b*, *c*, &c. sera répétée dans tous les produits en question, & comme le

nombre de ces lettres est m , $\frac{m \times m-1 \times m-2}{2}$

sera par conséquent le nombre de toutes les lettres écrites, donc le nombre cherché des

produits à trois lettres abc , abd , &c. sera

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}, \text{ \& c'est-là la valeur de } B.$$

ou du coefficient du quatrième terme.

A l'égard du coefficient C du cinquième, c'est-à-dire du nombre de produits de quatre lettres que doit donner le nombre m de lettres, on trouvera de même qu'il doit être

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4}, \text{ parce que ce}$$

nombre doit être le quart de toutes les lettres écrites dans ces produits, que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, & combinée avec tous les produits de trois lettres que donne le nombre $m-1$ de lettres, & que ces produits de trois lettres donnés par le nombre $m-1$ de lettres doit être

$$\frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3}, \text{ par la même rai-}$$

son que $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$ est celui des pro-

duits de trois lettres que fournit le nombre m de lettres.

Formant de même tous les autres coefficients & substituant ensuite dans la formule précédente à la place de A, B, C, D, E , &c.

ainsi trouvées, on aura enfin $x^m + m x^{m-1} + \dots$

$$\begin{aligned}
& m \times \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} a^3 x^{m-3} \\
& + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{2 \times 3 \times 4} a^4 x^{m-4} + \\
& \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} a^5 x^{m-5} +
\end{aligned}$$

&c. pour la puissance m de $x+a$.

Par la même raison la valeur de $p+q$ dont on avoit besoin article XLVII. sera

$$\begin{aligned}
p^m & + mqp^{m-1} + \frac{m \times m-1}{2} q^2 p^{m-2} \\
& + \frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} + \&c.
\end{aligned}$$

Formule générale pour l'élevation de $p+q$ à la puissance m .

XLIX.

Quant à celle de $p-q$, il est évident que pour la trouver, il ne faudra que faire q négatif dans cette formule, ce qui la changera en

$$\begin{aligned}
p^m & - mqp^{m-1} + \frac{m \times m-1}{2} q^2 p^{m-2} \\
& - \frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} + \&c.
\end{aligned}$$

L.

Si on veut présentement démontrer le théo- Démonstra-

tion du théo-
rème de l'ar-
ticle XLVII. remarquer que A est la somme de tous les ter-

$$\text{mes } p, + \frac{m \times m - 1}{2} q p, +$$

$$+ \frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3 \times 4} q p^2, \&c.$$

dans lesquels il n'entre aucune dimension im-
paire de q , & que B est la somme de tous les

$$\text{termes } m q p, + \frac{m - 1 \times m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3} q p^2,$$

$$+ \frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3 \times m - 4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} q p^3$$

&c. où q ne se trouve jamais qu'à une dimen-
sion impaire.

On verra ensuite que $A+B$ est la première
formule, & $A-B$ la seconde, ce qui étoit le
point où la difficulté étoit réduite, art. XLVII.

L I.

Application
de la formule
précédente à
un exemple.

Lorsqu'on voudra employer la formule précé-
dente à élever un binome quelconque à une
puissance donnée, rien ne sera plus facile; on
n'aura qu'à substituer dans la valeur précédente

de $p+q$ à la place de p le premier terme du
binome donné, à la place de q le second, & à la
place de m l'exposant de la puissance à laquelle
on veut élever le binome proposé. Qu'on se
propose, par exemple d'élever $3ac - 2bd$ à

la cinquième puissance, je fais

$$\begin{aligned} 3ac &= p \\ -2bd &= q \\ 5 &= m \end{aligned}$$

& j'ai d'abord $p^m = 3ac = 243 a^5 c^5$.

$$mqp^{m-1} = 5 \times -2bd \times 3ac^4$$

$$= -810 a^4 bc^4 d.$$

$$\begin{aligned} \frac{m \times m-1}{2} q^2 p^{m-2} &= 10 \times 4bbdd \times 3ac^3 \\ &= 1080 a^3 b^2 c^3 dd. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} &= 10 \times -2bd^3 \\ \times 3ac &= -720 a^2 b^3 c^2 d^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4} &= 5 \times -2bd^4 \\ \times 3ac &= 240 a b^4 c d^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} q^5 p^{m-5} \\ &= 1 \times -2bd^5 \times 3ac = -32 b^5 d^5. \end{aligned}$$

A l'égard des autres termes, leurs coefficients ayant tous pour un de leurs produits $m-5$ qui est zéro par la supposition de $m=5$, ils doivent tous être nuls; ainsi $3ac-2bc$ aura

pour valeur $245 a^3 c^3 - 810 a^4 b c^2 d + 1080 a^3 b^2 c^3 d^2 - 720 a^4 b^3 c^2 d^3 + 240 a^4 c d^4 - 32 b^4 d^4$.

LII.

Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes.

Lorsqu'on voudra élever, à une puissance donnée, une quantité composée de plus de deux termes, on le pourra encore facilement par la même méthode. Qu'il s'agisse, par exemple d'un trinome, en nommant p le premier terme de ce trinome, q la somme des deux autres, la difficulté de l'élevation du trinome sera réduite à celle du binome, puisque chacun

des termes mp $q, \frac{m \times m-1}{2} p^2 q$ &c.

ne renfermera pas de quantité à élever plus composée que des binomes.

Et lorsqu'on aura un polynome plus composé on réduira toujours la difficulté à l'élevation d'un polynome plus simple.

LIII.

Exemple. Pour donner un exemple de la manière dont on emploie la formule précédente à l'élevation d'une quantité qui a plus de deux termes, soit proposé d'élever $a + 2b - c$ à la quatrième puissance; on fera $m=4$, $p=a$, $q=2b-c$, & substituant ces valeurs dans la formule on aura

$$p^4 = a^4, \quad mqp^3 = 4 \times 2b - c \times a^3 \\ = 8a^3 b - 4a^3 c.$$

$$\frac{m \times m-1}{2} q^2 p^{m-2} = 6 \times \frac{m-2}{2} q^2 p^{m-2} = 24 a^2 b^2$$

$$- 24 a^2 b c + 6 a^2 c^2,$$

$$\frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 4 \times \frac{m-3}{2} q^3 p^{m-3}$$

$$= 32 a^3 b^3 - 48 a^2 b^2 c + 24 a b c^2 - 4 a c^3,$$

$$\frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4}$$

$$= 2b-c = 16b^4 - 4 \times 2b^3 \times c$$

$$+ \frac{4 \times 3}{2} \times 2b^2 \times c^2 - \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 3} \times 2b \times c^3$$

$$+ \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4} c^4 = 16b^4 - 32b^3 c + 24b^2 c^2$$

$$- 8bc^3 + c^4,$$

& partant $a+2b-c = a^4 + 8a^3b -$

$$4a^2c + 24a^2b^2 - 24a^2bc + 6a^2c^2 + 32ab^3$$

$$- 48abbc + 24abcc - 4ac^3 + 16b^4$$

$$- 32b^3c + 24bbcc - 8bc^3 + c^4.$$

L I V.

Après avoir trouvé la formule précédente, on ne pouvoit gueres tarder à soupçonner qu'elle devoit s'étendre à d'autres puissances que celles qui sont des nombres entiers & po-

qu'en supposant m entier & positif, elle pouvoit aussi s'appliquer à toutes les autres valeurs de m . Mais si on trouvoit de la vraisemblance à ce que cela fut ainsi, il s'en faut beaucoup qu'un Géometre put se contenter de cette vraisemblance, tout l'effet qu'elle pouvoit faire sur son esprit étoit de l'engager à faire des efforts pour parvenir à une démonstration. Voici une maniere de trouver cette démonstration qu'il n'étoit pas bien difficile d'imaginer.

Soit proposé premièrement de faire voir que la formule en question peut s'appliquer toutes les fois que m est une fraction quelconque positive ou ce qui revient au même, soit proposé de prouver l'Equation A (voyez la Table 1 ci-jointe) laquelle devient l'Equation B en divisant les deux membres par $p^{\frac{r}{n}}$ & en faisant $\frac{q}{p} = z$.

Où l'on fait voir que la formule précédente est encore bonne lorsque l'exposant est fractionnaire.

Mais pour prouver l'Equation B , il suffit de faire voir qu'en élevant les deux membres à la même puissance n , il viendra des quantités égales, c'est-à-dire (en faisant

$$s = \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1}{2} \times z^2$$

$$+ \frac{\frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \times \frac{r}{n} - 2}{2 \times 3} \times z^3 \&c.) \text{ qu'il s'agit de prouver l'Equation } D.$$

Or comme r & n sont deux nombres entiers on peut faire les élévations indiquées dans cette Equation par le moyen de la valeur générale de $p+q$, ce qui donnera l'Equation E .

Le Problème étant réduit à prouver l'Equation E , il faut trouver par le moyen de la valeur de s , celles de s^2 , s^3 , s^4 , &c. multiplier ensuite la valeur de s par n , celle de s^2 par $\frac{n \times n-1}{2}$, celle de s^3 par $\frac{n \times n-1 \times n-2}{2 \times 3}$, celle de s^4 par $\frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{2 \times 3 \times 4}$, &c.

afin d'avoir les valeurs de tous les termes du second membre de l'Equation E . Ces valeurs trouvées & écrites les unes sous les autres, on formera l'Equation F qui, en faisant les réductions que demande le second membre, devient l'Equation G qui est la même que l'Equation E . Donc l'Equation A qui avoit donné cette Equation est prouvée. Donc il est vrai en général que la formule de l'art. XLVIII. s'applique aussi-bien aux puissances fractionnaires quelconques positives qu'aux puissances entières positives.

L V.

La même
formule va
encore aux
puissances
négatives.

Pour faire voir présentement que la même formule s'applique également aux puissances négatives, soit entières, soit fractionnaires, il s'agit de prouver (voyez la Table 2 ci-jointe) l'Equation A dont le second membre est celui

que donne la formule de l'article XLVIII en faisant $m = \frac{r}{n}$.

Il est évident qu'au lieu de prouver l'Equation *A* on peut se contenter de prouver l'Equation *B* qui revient au même que la première en faisant $z = \frac{q}{p}$, & multipliant les deux

membres par $p \frac{r}{n}$.

Il est évident de plus qu'au lieu de la quantité

$\frac{r}{1+z} - \frac{r}{n}$, on peut mettre $\frac{r}{1+z} - \frac{r}{n}$, &

que par conséquent l'Equation *B* devient l'Equation *C*. Mais comme dans le premier membre de cette Equation, on peut mettre au lieu

de $\frac{r}{1+z} - \frac{r}{n}$ sa valeur tirée de la formule de l'article LIV, il est clair qu'il suffit de prouver l'Equation *D*. Or pour prouver cette Equation, il suffit de multiplier le second membre par le dénominateur du premier, & de s'assurer que le produit qui en vient est l'unité numérateur du premier membre, c'est ce qui arrive en effet, car faisant la multiplication, il vient pour produit la quantité *E*, dont le premier terme qui est l'unité est le seul qui reste après la réduction. Ainsi on est assuré présentement, par une démonstration, que la formule de l'article XLVIII. a toute la généralité qu'on ne faisoit d'abord que lui soupçonner.

Mais quelque assuré qu'on soit d'une vérité par une démonstration générale, on ne sçau-
roit gueres se défendre de chercher à la voir
confirmée dans quelque application particulière.
Sçachant, par exemple, que la formule pré-
cédente est bonne pour l'élévation des quanti-
tés quelconques à des puissances fractionnaires,
il est naturel qu'on veuille l'appliquer à quel-
que quantité qu'on sçache avoir exactement
une racine ou puissance fractionnaire.

Exemple
d'une racine
quarrée prise
par la formu-
le de l'éléva-
tion des puis-
sances.

Soit par exemple la quantité $1+2b+b^2$
dont on cherche la puissance $\frac{1}{2}$ ou ce qui
revient au même la racine quarrée. Ayant fait
 $p=1$, $q=2b+b^2$, & $m=\frac{1}{2}$ dans la formule
précédente, on trouvera

Le premier terme $p^m = 1$

Le second $m p^{m-1} q = b + \frac{1}{2} b^2$

Le 3^{ème}, $\frac{m \times m-1}{2} p^{m-2} q^2 = -\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^3$
 $-\frac{1}{8} b^4.$

Le 4^{ème}, $\frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} p^{m-3} q^3 = \frac{1}{2} b^3$
 $+\frac{3}{4} b^4 + \frac{3}{8} b^5 + \frac{1}{16} b^6.$

Le 5^{ème}, $\frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4$
 $= -\frac{5}{8} b^4 - \frac{5}{4} b^5 - \frac{55}{16} b^6 - \frac{5}{16} b^7 - \frac{5}{128} b^8.$
Le

$\frac{r}{n}$

4

le los
s
sine
es
nen

1
d'ur
qua
par
le d
tior
fanc

Le 6^{me}, &c. & c'est la somme de tous ces termes qui doit être la racine cherchée.

A l'inspection de cette quantité, on a de la peine à croire qu'elle puisse se réduire à $1+b$ qu'on sçait être la racine cherchée. Mais la généralité de la démonstration précédente, & une certaine expérience de calcul assurent bien-tôt de cette réduction.

En ajoutant tous ces termes, on remarque que le premier 1 reste tout entier; que le second $b + \frac{1}{2}b^2$ se réduit à b , parce que la partie $\frac{1}{2}b^2$ de ce second terme est détruite par la même quantité en négatif contenue dans le troisième terme $-\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$; que ce qui reste du troisième terme $-\frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$, après la destruction de $\frac{1}{2}b^2$ est entièrement détruit aussi par le quatrième $\frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$ dont il ne reste plus alors que $\frac{1}{8}b^4 + \frac{1}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$ & ce reste du quatrième terme se trouve détruit de même par le cinquième terme, & en poussant les réductions plus loin, on voit que rien ne reste de toute la quantité que $1+b$, ainsi qu'il devoit arriver.

L V I I.

Outre que cet exemple & tous ceux de même nature, qu'il est aisé de faire, confirment, pour ainsi dire par expérience, la proposition démontrée, article LI. ils montrent en même-tems une utilité réelle qu'à cette proposition, en donnant un moyen d'extraire les racines des quantités qui sont des puissances

Lorsque les quantités n'ont point de racines exactes on en

trouve d'ap-
prochées par
la méthode
précédente.

complètes. Mais il y a bien d'autres avantages à retirer de cette proposition. Lorsque la quantité dont on voudra prendre une racine n'en aura point d'exacte, on en aura une approchée par la formule précédente.

Exemple.

Qu'on cherche, par exemple, la racine 5^{me} de la quantité $a + v$. En substituant la plus grande des deux parties de cette quantité qu'on suppose être a à la place de p , & substituant la plus petite b à la place de q & $\frac{1}{5}$ à la place de m , on aura pour la racine cherchée

Ce que c'est
qu'une série
ou suite in-
finie.

$$a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} a^{-\frac{4}{5}} b - \frac{1 \times 4}{2 \times 5} a^{-\frac{9}{5}} b^2 + \frac{1 \times 4 \times 9}{2 \times 5 \times 15} a^{-\frac{14}{5}} b^3 - \frac{1 \times 4 \times 9 \times 14}{2 \times 5 \times 3 \times 4 \times 6 \times 5} a^{-\frac{19}{5}} b^4 + \frac{1 \times 4 \times 9 \times 14 \times 19}{2 \times 5 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 5} a^{-\frac{24}{5}} b^5 - \&c. \text{ ou } a^{\frac{1}{5}} \times 1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} + \frac{6b^3}{125a^3} - \frac{71b^4}{625a^4} + \&c.$$

Or quoique ce ne soit qu'en formant de la même manière une infinité de termes, qu'on puisse être assuré que la quantité précédente qui est de celles qu'on appelle suites ou series infinies, exprime exactement la racine cherchée; en se contentant néanmoins de prendre un grand nombre de ces termes, on approche extrêmement de la vraie racine cherchée. S'il arrive même que a soit considérablement plus grand que b , on n'a pas besoin de beaucoup de termes pour approcher sensiblement de la vraie racine.

Qu'on suppose, par exemple, $b = \frac{1}{10} a$, on

aura pour les six premiers termes de la suite précédente

$$a^{\frac{1}{4}} \times 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{1250} + \frac{3}{62500} - \frac{21}{6250000} + \frac{399}{11621000000}$$

Or si on fait attention à la considérable diminution successive de ces six termes, on voit que les termes qu'on pourroit écrire de plus seroient si petits qu'ils ne valent pas la peine d'être cherchés.

LVIII.

L'utilité de la formule des puissances ne se borne pas encore à trouver par approximation toutes sortes de puissances fractionnaires ou négatives, elle est infiniment plus étendue en servant à réduire en séries toutes sortes de quantités où il entre tant de signes radicaux, diviseurs, &c. qu'on voudra. Qu'on ait, par

Toutes sortes de quantités peuvent être réduites en séries par la formule précédente.

exemple la quantité
$$\sqrt[4]{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}$$
,

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$$

en réduisant d'abord les deux quantités $\sqrt{a+b}$ & $\sqrt{a-b}$ en séries, & les ajoutant, puis en élevant la série qui en est la somme à la puissance $\frac{1}{4}$, on formera une nouvelle série, qui étant multipliée ensuite par celle qu'on trouveroit de même pour

$$\sqrt[4]{a+b} - \sqrt[4]{a-b} \text{ ou } \sqrt[4]{a+b} + \sqrt[4]{a-b}$$

 donneroit enfin une seule série pour exprimer la quantité proposée. Or outre qu'on a ainsi

par approximation, toutes ces quantités composées de radicaux & de diviseurs complexes, il y a une infinité de cas où il est très-utile, pour des démonstrations, que ces quantités soient délivrées de tous ces radicaux & diviseurs complexes, ainsi qu'elles le sont par leurs transformations en séries, mais il est tems de retourner à la résolution des Equations.





ELEMENS D'ALGEBRE.

CINQUIE'ME PARTIE.

*Résolution des Equations du troisiéme
& du quatriéme degré.*



ORSQU'ON aura voulu passer de la
résolution des Equations exprimées

généralement par $ax^m = b$ &

$ax^{2m} + bx^m = c$ à celles qui
contenoient outre ces termes, les intermé-
diaires, on a bien-tôt senti des difficultés qui
ont fait abandonner l'espérance de résoudre
ces Equations en général. On n'a pû encore
parvenir qu'à la solution de celles du troisiéme
& du quatriéme degré, encore la méthode

qu'on a trouvé pour les résoudre, souffre-t-elle une exception considérable; voici le chemin qu'on a pu suivre en découvrant cette méthode.

I.

Equation du
troisième
degré la plus
composée.

Soient représentées par l'Equation $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ toutes celles du troisième degré. Si on pouvoit réduire cette Equation à une autre qui n'eut que le premier, & que le dernier terme, il est évident que ce seroit l'avoir résolue. Or quel est le moyen le plus naturel de transformer une Equation en une autre, dans laquelle on soit libre de faire quelque changement, c'est de substituer dans cette Equation à la place de l'inconnue quelque quantité, dans laquelle on laisse une lettre indéterminée, afin de pouvoir s'en servir à volonté.

I I.

Transforma-
tion par la-
quelle on fait
évanouir un
terme quel-
conque de
cette Equa-
tion.

Soit donc substitué dans cette Equation au lieu de y , $x + r$, nous aurons $x^3 + 3r + d \times x x$
 $+ 3rr + 2dr + e \times x + r^3 + dr^2 + er + f = 0$
que l'on écrit aussi de cette manière

$$\begin{aligned} x^3 + 3rx^2 + 3rrx + r^3 &= 0 \\ + d &+ 2dr + dr^2 \\ + e &+ er \\ + f \end{aligned}$$

Comme on est le maître de r dans cette Equation, il est aisé de voir qu'on peut par son moyen faire évanouir celui des termes qu'on

voudra, mais aussi on n'en sauroit faire disparaître qu'un à la fois.

Qu'on fasse, par exemple $3r + d = 0$ ou $r = -\frac{1}{3}d$, le second terme s'évanouira, & l'Equation deviendra

$$x^3 + ex + \frac{2}{27}d^3 = 0 \\ -\frac{1}{3}dd - \frac{de}{3} \\ + f$$

Si on fait au contraire $3rr + 2dr + e = 0$ ou $r = -\frac{1}{3}d \pm \sqrt{-\frac{e}{3} + \frac{1}{9}dd}$, le troisième terme s'évanouira, mais les deux autres resteront.

Si on vouloit faire évanouir le dernier terme, il faudroit faire $r^3 + dr^2 + er + f = 0$, & alors pour avoir r , il faudroit résoudre une Equation pareille à la proposée.

Avec un peu de connoissance du calcul, on devoit bien s'attendre que la substitution de $x + r$ à la place de y ne pouvoit pas faire évanouir plusieurs termes à la fois, parce que l'introduction d'une inconnue ne peut servir qu'à résoudre une seule Equation, ou ce qui revient au même, à remplir une condition; or l'évanouissement de chaque terme fait une condition. Mais si par cette transformation on n'est pas parvenu entièrement au but que l'on avoit eu de réduire l'Equation proposée à deux termes, on a du moins changé la question en une nouvelle qui paroît plus simple, puisqu'il ne s'agit plus que d'une Equation à trois termes.

Des deux Equations transformées qu'on peut avoir en faisant évanouir, ou le premier, ou le second terme, la première, c'est-à-dire,

$$x^3 + cx + \frac{2}{3}d^{\frac{2}{3}} = 0 \\ - \frac{1}{3}d^{\frac{2}{3}} - \frac{de}{3} \\ + f$$

est la plus simple, aussi est-ce celle que nous allons chercher à résoudre en tâchant de diminuer encore ses termes, mais nous suspendrons un moment cette recherche, parce que la méthode qu'on vient d'employer pour transformer les Equations du troisième degré offre si naturellement de nouvelles vérités sur les Equations de tous les autres degrés, qu'il est à propos de s'y arrêter un peu.

III.

On voit d'abord qu'à l'aide de la même transformation de y en $x+r$, on peut faire aussi évanouir le terme qu'on voudra d'une Equation d'un degré quelconque.

Transformation
précédente appli-
quée à une
Equation du
quatrième
degré.

Qu'on ait par exemple l'Equation du quatrième degré la plus générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, en y mettant $x+r$ au lieu de y , on aura

$$x^4 + 4rx^3 + 6r^2x^2 + 4r^3x + r^4 = 0 \\ + a + 3ar + 3ar + ar^3 \\ + b + 2br + br^2 \\ + c + cr \\ + d$$

dans laquelle faisant $4r + a = 0$ ou $r = -\frac{1}{4}a$,

on aura une Equation du quatrième degré qui n'aura point de second terme.

De même en déterminant r par l'Equation du second degré $6r^2 + 3ar + b = 0$, on aura une Equation du quatrième degré qui n'aura point de troisième terme. Et en faisant r tel qu'il conviendrait pour résoudre l'Equation du 3^e degré $4r^3 + 3ar^2 + 2tr + c = 0$, on auroit une Equation du 4^{me} degré qui n'auroit point de quatrième terme. Le cinquième s'en iroit de même par le moyen d'une Equation du 4^{me} degré. Mais on ne s'arrête pas ordinairement à faire évanouir d'autres termes que le second, parce que l'évanouissement des autres termes amène presque toujours des calculs compliqués de radicaux & fort pénibles.

Ce n'est ordinairement que le second terme qu'on fait évanouir.

IV.

Dans une Equation générale du cinquième degré $y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$ la transformée $y = x + r$ donne l'Equation $x^5 + 5rx^4 + \&c.$ dont le second terme s'é-

Evanouissement du second terme dans une Equation du cinquième degré.

vanouira par l'Equation du premier degré $5r + a = 0$ ou $r = -\frac{1}{5}a$.

V.

Et en général dans une Equation d'un degré quelconque m représentée par $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \&c. = 0$ il sera aisé de trouver par la formule des puissances donnée dans la 14^{me} Partie, article XLVIII. que le second terme s'évanouira en faisant l'inconnue $x = y$

Dans une Equation du degré quelconque m .

$$-\frac{a}{m}.$$

Résolution
de l'Equa-
tion générale
 $x^3 + px + q = 0$.

Après cette petite digression, remettons-nous à chercher la solution de l'Equation du troisième degré

$$x^3 + ex + \frac{2}{17}d^3 = 0 \\ -\frac{1}{3}d^2 - \frac{de}{3} + f$$

à laquelle l'Equation générale $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ s'étoit réduite par la supposition de $y = x - \frac{1}{3}d$, & pour abréger les calculs, écrivons-là ainsi, $x^3 + px + q = 0$.

En suivant l'idée que nous avons déjà employée, faisons encore une transformée, substituons, par exemple $u + z$ à la place de x ; non dans la vûe de faire évanouir un terme de cette Equation, ainsi qu'on avoit fait la première fois, car on verroit bien-tôt que le terme qui avoit disparu reviendrait, mais pour chercher à décomposer cette Equation en de plus simples. Sans voir distinctement qu'un tel moyen doit réussir, on sent bien que la transformation d'une Equation en une autre où l'on a une lettre à déterminer à volonté ne peut gueres manquer d'être utile.

La substitution de $x = u + z$ étant faite, on a $u^3 + 3umz + 3uz^2 + z^3 + pu + pz + q = 0$. Supposons maintenant que l'une des inconnues u ou z soit telle que $u^3 + z^3 + q = 0$, on aura en ce cas l'Equation $3u^2z + 3uz^2 + pu + pz = 0$, de laquelle on tire aisément en la divisant par $u + z$, $3uz + p = 0$ ou

$u = -\frac{p}{3z}$. Voilà donc de quoi chasser facilement une des inconnues introduites, il ne s'agit plus que de sçavoir quelle sera l'Equation qui déterminera l'autre inconnue. Pour cela, il faut remettre cette valeur de u dans la premiere Equation $u^3 + z^3 + q = 0$, ce qui donnera $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 + q = 0$, ou $z^6 + qz^3 = \frac{p^3}{27}$, or cette Equation quoique plus élevée que la proposée, est cependant bien plus aisée à résoudre, car elle est de la classe de celles que nous avons résolues dans la quatrième Partie, article xx. & la valeur qu'elle

donne pour z est $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Donc u ou $-\frac{p}{3z}$ sera $\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}}$

qui se réduit facilement à $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$; car on peut voir assez facilement que le produit de $-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ par $+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ est $\frac{1}{27}p^3$, & partant que $\frac{1}{3}p$ est le produit des racines cubes de ces quantités. Ajoutons présentement ces valeurs de u & de z , & nous aurons $u + z$ ou.

..... $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$
 $-\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ ou simplement
 $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$

$-\sqrt{+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, car en prenant le radical $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ en $-$, on n'a pas une valeur de x différente de celle qu'on a en le prenant en $+$.

V. I I.

La formule précédente ne donne qu'une des trois racines.

Par cette valeur de x , on voit qu'il n'en est pas des Equations du troisième degré comme de celles du second, où la même expression d'une racine marquoit à l'aide du signe $+$ les deux racines à la fois; ici on trouve une expression qui ne sauroit désigner qu'une des trois valeurs de x .

Maniere d'avoir les deux autres.

Pour trouver les deux autres, il faut diviser l'Equation $x^3 + px + q = 0$ par la racine que donne la valeur précédente de x , & la résolution de l'Equation du second degré qui en sera le quotient donnera les deux autres racines cherchées.

Si on veut trouver la valeur générale de ces deux racines, il faut faire pour abréger

les calculs $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}} = m$, & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}} = n$, & faire attention qu'en ce cas $mn = \frac{1}{3}p$ & $m^3 - n^3 = q$. Cela posé, la division de l'Equation $x^3 + px + q = 0$ par $x + m - n$, qui est alors la racine qu'on vient de trouver, donnera pour quotient $xx + nx - mx + mm + nn + mn = 0$ dont les deux racines, c'est-à-dire les deux racines cherchées de l'Equation $x^3 + px + q = 0$ sont

$$x = \frac{m-n}{2} + \frac{1}{2} \times m + n \sqrt{-3} \text{ ou } \dots\dots$$

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3}$$

qui sont nécessairement imaginaires toutes les

fois que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ est une quantité réelle.

On auroit pû reconnoître dès l'article v, de la quatrième Partie, où il n'étoit question que des Equations à deux termes, l'espece d'imperfection que donne à la solution des Equations du troisième degré ; la différence de forme des trois racines , mais cette espece d'imperfection est ici plus frappante en se trouvant dans la solution générale.

VIII.

Ce désavantage de la solution précédente des Equations du troisième degré n'en peut paroître un qu'à ceux qui considèrent , pour ainsi dire , métaphysiquement l'Algebre , mais il y en a un autre bien plus frappant pour tout le monde , & qui a extrêmement exercé tous les Calculateurs. C'est que cette solution n'apprend rien du tout pour la valeur de x toutes les fois que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$, & qu'il est en même - tems négatif. Dans ce cas qui est très - étendu , la valeur de la quantité

$\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$ est imaginaire , & par conséquent les deux quantités

Cas où la formule précédente ne sauroit faire connoître x , à cause des imaginaires qu'elle renferme.

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \& \dots \dots \dots$$

$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ qui composent la valeur de x sont imaginaires aussi, mais on n'en sçauroit conclure pour cela que la valeur de x soit imaginaire, ce qui bien loin d'être regardé comme un vice de la solution, la rendroit une solution complète; & on ne sçauroit non plus, du moins par les méthodes connues jusqu'à présent, déterminer quelle est la quantité réelle qu'exprime cette valeur de x .

I X.

Non-seulement on ne sçauroit conclure de l'expression que x a dans ce cas que la racine cherchée est imaginaire, mais on s'est assuré par divers moyens que cette valeur étoit toujours réelle alors, voici de tous ces moyens celui * qui m'a paru le plus direct.

On démon-
tre cepen-
dant que
dans ce cas
 x est réel.

Soit repris la valeur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$
 $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ de x ; mettons à
la place de $\frac{1}{2}q$, a & à la place de $\dots \dots \dots$

$\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ supposé imaginaire, $b\sqrt{-1}$, on
aura $x = \sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$.

Cherchons maintenant les valeurs de

$\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}}$ & de $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$ par la

* Je l'ai tiré d'un Mémoire de M. Nicole. Mem. de l'Acad. année 1738. p. 99. & 100.

formule donnée dans la quatrième Partie, article XLVIII. pour l'élevation du binôme.

Nous aurons pour la première de ces deux quantités $-a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2$

$-\frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 + \&c.$

Et pour la seconde,

$-a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 +$

$\frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \&c. \&$

par conséquent la valeur de x sera la suite

infinie $-2a^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{30}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4$

$-\frac{308}{6561}a^{-\frac{17}{3}}b^6 + \&c. \text{ ou}$

$-2a^{\frac{1}{3}} \times 1 + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{10b^4}{243a^4} + \frac{154b^6}{6561a^6} - \&c.$

qui ne contient aucune racine imaginaire ; ainsi dans le cas où $\frac{1}{27}P^3$ est négatif & plus grand

que $\frac{1}{4}q^2$ la valeur $\sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}P^3 + \frac{1}{4}q^2}}$

$-\sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}P^3 + \frac{1}{4}q^2}}$ de x qui est alors sous une forme imaginaire , est cependant une quantité toujours réelle. Malheureusement on n'a pû encore jusqu'à présent lui trouver une forme réelle qu'en admettant, ainsi qu'on vient de faire , une infinité de termes dans son expression , ce qui ne peut servir qu'à prouver que cette valeur est réelle, mais non à la faire connoître exactement.

Par la même
méthode on
trouvera une
valeur ap-
prochée de
 x .

Si on veut se contenter d'une approximation, on pourra faire usage de la série précédente, car en supposant a plus grand que b , les termes de cette série iront en diminuant, & par conséquent on pourra négliger les derniers quand ils seront parvenus à n'être que de très-petites quantités. S'il arrive au contraire que a soit plus petit que b , il faudra en employant la formule du binome pour trouver

$$\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} \& \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}, \text{ avoir l'attention de prendre } b\sqrt{-1} \text{ pour le premier terme du binome, \& } a \text{ pour le second; \& l'on aura alors pour la valeur de } x \text{ ou de } \sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} \text{ la quantité}$$

$$+ \frac{2}{3} b^{-\frac{2}{3}} a - \frac{10}{81} b^{-\frac{8}{3}} a^3 + \frac{44}{729} b^{-\frac{14}{3}} a^5$$

$$- \frac{748}{19683} b^{-\frac{20}{3}} a^7 + \&c. \text{ ou } \dots\dots\dots$$

$$- \frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}} x - 1 + \frac{5a^2}{27b^{\frac{2}{3}}} - \frac{21a^4}{241b^{\frac{2}{3}}} + \frac{374a^6}{6561b^{\frac{2}{3}}} - \&c.$$

qui est aussi réelle que l'autre expression, & dont tous les termes décroissent quand a est plus petit que b .

XI.

Les deux autres valeurs d' x sont aussi réelles dans le même cas.

Nous avons vû article VII. que des trois racines de l'Equation $x^3 + px + q = 0$ celles qui sont exprimées par $\dots\dots\dots x =$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}P^3}} - \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}P^3}} +$$

$\pm \sqrt[3]{\frac{1}{4}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-\frac{1}{4}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3}$
 sont toutes deux imaginaires toutes les fois que

$\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ étoit une quantité réelle. Nous allons voir présentement que ces deux racines sont toujours réelles toutes les fois que

$\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ est imaginaire, c'est-à-dire ; toutes les fois que p est négatif, & tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

Car si on change à l'aide des dénominations qu'on vient d'employer l'expression de ces deux valeurs de x en

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$$

$$\pm \frac{1}{3}\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} \times \sqrt{-3}$$

& qu'on réduise ainsi qu'on vient de faire les

quantités $\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}}$ & $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$ en séries, on aura pour ces deux valeurs de x

$$a^{\frac{1}{3}} \times 1 + \frac{bb}{9aa} - \frac{10b^4}{243a^4} + \frac{154b^6}{6561a^6} - \&c.$$

$$\pm \frac{b}{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}} \times 1 - \frac{5bb}{27aa} + \frac{12b^4}{243a^4} - \frac{374b^6}{6561a^6} + \&c.$$

expression entièrement réelle.

X I I.

Comme l'Equation la plus générale du troisième degré représentée par $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ s'est réduite à $x^3 + ex + \frac{2}{27}d' = 0$

$$-\frac{1}{3}d^2 - \frac{de}{3} + f$$

S

Comment
des racines
de l'Equa-
tion

$x^3 + px + q$
 $= 0$, on tire
celles de l'E-
quation
 $y^3 + dy^2 + ey + f$
 $= 0$.

ou en abrégant $x^3 + px + q = 0$ par la
supposition de $y = x - \frac{1}{3}d$, il s'ensuit que
les valeurs de y dans l'Equation générale
 $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ sont celles qu'on a en
résolvant cette dernière Equation $x^3 + px + q$
 $= 0$, & en retranchant de ses trois racines
 $\frac{1}{3}d$.

XIII.

Une Equa-
tion du troi-
sième degré
a ses trois
racines réel-
les, ou une
réelle avec
deux imagi-
naires.

De-là, il suit qu'une Equation quelconque
du troisième degré sera entièrement dans le
même cas par rapport aux racines réelles ou
imaginaires, que l'Equation qu'elle produit
par l'évanouissement du second terme.

Ainsi on voit en se rappelant les articles
VI, XI. que toute Equation du troisième
degré doit au moins avoir une racine réelle,
& que les deux autres sont toujours ou tou-
tes deux réelles, ou toutes deux imaginaires.

XIV.

Comment
on distingue
ces cas.

Pour distinguer lequel de ces deux cas ar-
rive dans une Equation du troisième degré
donnée, on commencera par en faire éva-
nour le second terme afin de la pouvoir com-
parer à l'Equation $x^3 + px + q = 0$; & cette
opération étant faite, si p est positif ou qu'étant
négatif il soit tel que $\frac{1}{27}p^3$ ne soit pas plus
grand que $\frac{1}{4}qq$, il n'y aura qu'une racine réelle,

laquelle sera déterminée exactement par la formule de l'article VI.

Si au contraire p est négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ soit plus grand que $\frac{1}{4}qq$, les trois racines seront réelles, mais aucune d'elles ne pourra être déterminée par la formule de l'article VI; à moins qu'on ne se contente d'une approximation comme celle qu'on a en transformant cette formule en une suite infinie.

XV.

S'il arrivoit que $\frac{1}{27}p^3$ fut négatif & égal à $\frac{1}{4}qq$, on pourroit être embarrassé à sçavoir auquel des deux cas précédens l'Equation se rapporteroit, c'est-à-dire qu'on ne sçauroit s'il devroit y avoir seulement une racine réelle ou si

Quelles sont les racines lorsque $\frac{1}{27}p^3$ est négatif & $= \frac{1}{4}qq$.

toutes les trois le seroient, à cause que $\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}$ étant alors zero, on ne sçait si on le doit compter parmi les quantités positives ou parmi les négatives; mais l'inspection des trois racines ou valeurs d' x trouvées précédemment décide bien-tôt la question. Car la première valeur

exprimée par $\dots\dots\dots \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$

$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ se réduit alors à ..

$-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, & les deux autres valeurs exprimées généralement par

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$
S ij

$$\pm \sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \pm \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3}$$

se réduisent alors à $\pm \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} \pm 0$, c'est-à-dire qu'elles sont toutes deux égales à $\pm \sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$.

Ainsi les Equations où $\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ est zero sont comptées parmi celles dans lesquelles les trois racines sont réelles.

XVI.

Application
des méthodes
précédentes
à un exem-
ple.

Pour faire présentement quelques applications des regles précédentes, supposons d'abord qu'on ait l'Equation $y^3 + 3yy - 3y + 25 = 0$ à résoudre; on commencera par faire évanouir le second terme de cette Equation, ce qui se fera suivant l'article II. en supposant $y = x - 1$ & l'Equation délivrée de second terme que l'on aura par cette substitution sera $x^3 - 6x + 30 = 0$ qui étant comparée à $x^3 + px + q = 0$ donne $p = -6$ & $q = 30$.

Ces valeurs étant substituées dans....

$\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, cette quantité devient $\sqrt[3]{217}$ qui est une quantité réelle, ainsi la formule de l'article VI doit donner en ce cas la valeur cherchée de x .

Faisant donc dans cette formule.....

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$
les substitutions de 15 pour $\frac{1}{2}q$ & de $\sqrt[3]{217}$
pour $\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ cette valeur générale de x

Devient $\sqrt[3]{-15+\sqrt{217}}-\sqrt[3]{15+\sqrt{217}}$ qui est la seule racine réelle que contienne l'Equation $x^3-6x+30=0$, & qui ne sçauroit être réduite à une plus simple expression; substituant ensuite cette valeur de x dans l'Equation $y=x-1$, on aura

$y=\sqrt[3]{-15+\sqrt{217}}-\sqrt[3]{15+\sqrt{217}}-1$, pour la seule racine réelle de l'Equation proposée $y^3+3y-3y+25=0$.

XVII.

Si on avoit une Equation du sixième degré, où l'inconnue ne se trouvât à aucune dimension impaire, il est évident qu'on la résoudroit par la même méthode que la précédente, puisque cette Equation se réduiroit tout de suite au troisième degré par une transformation; qu'on eut, par exemple $z^6+9z^4+39z^2+55=0$, en regardant zz comme l'inconnue de cette Equation, & supposant, suivant les principes précédens zz égal à une nouvelle inconnue x moins le tiers du coefficient du second terme, c'est-à-dire $zz=x-3$, on changera cette Equation en $x^3+12x-8=0$ qui n'est que du troisième degré & qui n'a point même de second terme.

Autre exemple contenant une Equation du sixième degré qui se réduit au troisième.

Comparant alors cette Equation avec $x^3+px+q=0$, on a $p=12$, $q=-8$, & partant $\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}=\sqrt[3]{80}$ d'où x ou . . .

S iij

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}} =$$

$$\sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}, \text{ \& comme, par la}$$
 supposition $zx = x - 3$ ou $z = \sqrt{x - 3}$ on
 aura alors l'inconnue cherchée.....

$$x = \pm \sqrt[3]{\sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}} - 3$$
 &
 les deux valeurs que cette expression donne
 en prenant le radical en $+$ & en $-$ sont les
 seules réelles des six que doit avoir l'Equa-
 tion proposée.

Equations
plus élevées
qui s'y ré-
duiroient
aussi.

En général qu'on ait une Equation telle
 que $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ on la ré-
 duira tout de suite à une du troisième degré &
 sans second terme en faisant $z = x - \frac{1}{3}a$.

XVIII.

Supposons présentement qu'on ait l'Equa-
 tion $x^3 + 3x - 4 = 0$ à résoudre, cette Equa-
 tion n'ayant point de second terme, on peut
 tout de suite la comparer à $x^3 + px + q = 0$,
 & l'on a par cette comparaison $p = 3$ & $q = -4$
 & comme p est positif, on voit par l'article
 XIV. que la formule générale de l'article VI.
 doit encore réussir dans ce cas; substituant en
 effet ces valeurs de p & de q dans cette for-
 mule générale..... $= x$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$$
 on a pour la seule valeur réelle de x .

$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}}$. Si l'on applique présentement à cette expression la méthode de la quatrième Partie, art. xxxv, xxxviii & xli. on verra qu'elle se peut aisément réduire, parce que $2 + \sqrt{5}$ est le cube de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, & que $-2 + \sqrt{5}$ est celui de $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. D'où cette valeur de x se réduit à 1.

On auroit pû parvenir à cette même valeur de x sans la formule précédente en employant la règle de la troisième Partie, article xii & xiii. car on auroit trouvé que $x - 1$ étoit un diviseur exact de la quantité $x^3 + 3x - 4$.

XIX.

Soit maintenant proposé de résoudre l'Equation $x^3 - 90x - 98 = 0$. En comparant cette Equation à l'Equation générale $x^3 + px + q = 0$ on a $p = -90$ & $q = -98$; or p étant négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$ l'Equation proposée est de celles qui ne peuvent pas se résoudre par la formule précédente. Je cherche alors par la méthode de la troisième Partie, art. xii & xiii si elle n'aura pas quelque diviseur, & ayant reconnu qu'elle n'en a point, je me sers de la méthode enseignée article x. pour trouver une valeur approchée.

Pour cela, je commence par substituer pour p & q leurs valeurs -90 & -98 dans la formule générale

$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}}$

& j'ai

Quatrième
exemple
dans lequel
la formule
de l'art. vi.
est insuffi-
sante.

Application
de la métho-
de de l'arti-
cle x pour
approcher
des racines.

$x = \sqrt[3]{49 + \sqrt{-24599}} - \sqrt[3]{-49 + \sqrt{-24599}}$
 qui étant comparé à l'expression

$\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$, laquelle
 étoit devenue (article x.) la suite infinie

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}}x - 1 + \frac{5a^2}{27b^2} - \frac{21a^4}{243b^4} + \frac{174a^6}{6561b^6} - \&c.$$

donne $a = -49$, $bb = +24599$, qu'il ne
 s'agit plus que de substituer dans cette suite
 infinie.

Pour faire cette substitution, je commence
 par prendre la racine cube de 24599 afin d'a-
 voir $b^{\frac{2}{3}}$, l'opération faite, j'ai environ 29, 08
 pour cette racine cube, & partant

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}} \text{ ou } \frac{98}{3\sqrt[3]{24599}} \text{ est environ } \frac{10000}{8702}.$$

Quarant ensuite aa & le divisant par bb ,
 j'ai pour $\frac{aa}{bb}$ environ 0, 0976, dont le quarré

0, 00952 est la valeur de $\frac{a^4}{b^4}$, quant à la

valeur de $\frac{a^6}{b^6}$, & des puissances plus élevées,
 elle est inutile dans cette suite dont la marche
 est assez prompte.

Faisant alors les substitutions des valeurs de
 $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4}$ à la place de ces quantités, j'ai envi-
 ron $-1, 104$ pour la valeur de x donnée
 par la formule de l'article vi, si on veut avoir

les deux autres valeurs de x qui doivent aussi être réelles, suivant l'article XIV. il n'y a qu'à diviser l'Equation $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1, 104$ qui est à très-peu de chose près, suivant ce que l'on vient de voir, une de ses racines. La division faite, on a pour quotient $xx - 1, 104x - 88, 781$, & pour reste $0, 0142$ quantité assez petite pour être négligée, de sorte qu'on peut regarder l'Equation $xx - 1, 104x - 88, 781 = 0$, comme le quotient exact de la division de $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1, 104$, & comme le produit des deux racines cherchées. Résolvant donc cette Equation on a pour les deux valeurs de x qu'elle donne $x = 0, 552 \pm \sqrt{89, 0857}$, c'est-à-dire $+9, 990$ & $-8, 886$.

Ainsi les trois valeurs de x dans l'Equation proposée $x^3 - 90x - 98 = 0$ sont à peu près $-1, 104$; $+9, 990$; $-8, 886$. Quant aux valeurs exactes aucunes des méthodes connues jusqu'à présent ne sçauroient les faire trouver, & toute Equation qui ayant, comme la précédente, ses coefficients rationels n'aura aucun diviseur rationel, sera de même irrésoluble par ces méthodes lorsque $\frac{1}{17}p$ sera négatif & plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

XX.

La méthode que nous venons d'employer pour résoudre par approximation les Equations du troisième degré dont les trois racines sont réelles, a cet inconvénient que lorsque a diffère peu de b , les termes de la série qui

Inconvénient de l'approximation enseignée, article X.

exprime la valeur de x décroissent si lentement, qu'il en faut un très-grand nombre pour approcher un peu exactement de la vraie valeur de x , & que par conséquent les calculs deviennent extrêmement pénibles. Il est donc à propos de chercher quelque méthode plus généralement commode dans la pratique.

X X I.

Autre méthode d'approximation générale & facile dans la pratique.

Dans cette vûe, je reprends l'Equation $x^3 + px + q = 0$ ou plutôt $x^3 - px + q = 0$ (les cas qui échappent à la méthode de l'article VI. ne se trouvant jamais que parmi ceux où p est négatif) & je me propose de lui donner cette forme $z^3 - z = r$ qui est plus simple à cause qu'elle ne renferme qu'un terme d'indéterminé.

Afin de faire cette transformation, je fais $x = mz$, ce qui change l'Equation $x^3 - px + q = 0$ en $z^3 - \frac{p}{mm} z = -\frac{q}{m^3}$ qui m'apprend qu'en faisant $m = -\sqrt{p}$, si q est positif, & $m = \sqrt{p}$ si q est négatif, je donnerai toujours à l'Equation $x^3 - px + q = 0$ la forme $z^3 - z = +r$.

Je remarque présentement que si cette Equation est de celles que la formule de l'article VI. ne sçauroit résoudre, il faudra nécessairement que r soit plus petit que $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$ ou $\sqrt{\frac{4}{27}}$; & qu'en même-tems il y ait une des racines qui soit positive & plus grande que l'unité, mais moindre que $\sqrt{\frac{4}{3}}$; car si z surpassoit $\sqrt{\frac{4}{3}}$ on auroit pour r , c'est-à-dire pour $z^3 - z$ plus de

$\sqrt[3]{\frac{4}{27}}$, & par conséquent l'Equation $z^3 - z = r$ seroit du nombre de celles où la formule de l'article VI. réussit.

Cela posé, je fais $z = 1 + s$, & substituant cette valeur dans l'Equation $z^3 - z = r$, elle donne $2s + 3ss + s^3 = r$, dans laquelle je remarque que s étant une quantité toujours plus petite que $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - 1$, c'est-à-dire plus petite que 0,155, son cube est plus petit que 0,0037. Or ce cube étant donc si petit, je vois qu'on ne peut pas commettre une grande erreur en négligeant le terme s^3 dans l'Equation $2s + 3ss + s^3 = r$, c'est-à-dire en se contentant de résoudre l'Equation $2s + 3ss = r$. Je résous donc cette Equation, & elle me

$$\text{donne } s = \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}r} - \frac{1}{3} = \pm \frac{\sqrt{1+3r} - 1}{3}$$

$$\text{\& par conséquent } z \text{ ou } 1 + s = \frac{2 \pm \sqrt{1+3r}}{3}$$

ou simplement $z = \frac{2 + \sqrt{1+3r}}{3}$, puisque des valeurs de z , on ne cherche que celle qui surpasse l'unité & qui est positive.

Pour sçavoir à quoi peut monter l'erreur qu'on commet dans cette méthode, en négligeant le terme s^3 , prenons le cas où ce terme est le plus grand, supposons que z ou $1 + s$ soit $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$, ce qui ne peut jamais arriver tant que l'Equation proposée est de celles qui échappent à la méthode de l'article VI, nous aurons alors $r = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$, & notre méthode

nous donnera pour valeur de z , $\frac{2+\sqrt{1+\sqrt{\frac{4}{3}}}}{3}$
 au lieu de la vraie valeur $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Or il est clair
 que ces deux quantités ne diffèrent entr'elles
 que d'environ $\frac{1}{1000}$ eme, donc la plus grande
 erreur qu'on peut commettre, en prenant
 $\frac{2+\sqrt{1+\sqrt{\frac{4}{3}}}}{3}$ pour la racine positive de l'Equa-

La méthode
 qu'on vient
 d'enseigner,
 donne d'a-
 bord x à
 $\frac{1}{1000}$ eme
 près au
 moins.

tion $z^3 - z = r$, ne va pas à $\frac{1}{1000}$ eme, si cet-
 te Equation est de celles que la formule de
 l'article VI. ne sçauroit résoudre.

Ayant calculé la valeur de z par l'expression
 $\frac{2+\sqrt{1+\sqrt{\frac{4}{3}}}}{3}$ il faudra la multiplier par m pour
 avoir la valeur approchée de x .

XXII.

Si on ne trouve pas que cette résolution de
 l'Equation proposée approche assez de la vé-
 ritable, c'est-à-dire qu'on regarde les erreurs
 qui pourroient aller aux environs d'un milliême
 comme trop considérables, rien ne sera plus
 aisé que de trouver une autre valeur de la ra-
 cine beaucoup plus exacte, par une opération
 fondée sur les mêmes principes. Ayant calculé
 cette première valeur de x , & l'ayant nommée
 pour abréger k , on imaginera que la correc-
 tion qu'il faut lui faire soit ϵ , c'est-à-dire,
 qu'on supposera que le véritable x soit $k + \epsilon$;

substituant alors cette quantité pour x dans l'Equation $x^3 - px + q = 0$, l'on aura...
 $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - pk - p\varepsilon + q = 0$ ou simplement $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 - pk - p\varepsilon + q = 0$ en négligeant le terme ε^3 qui est bien plus négligeable que ne l'étoit le terme ε^1 à la première opération, puisqu'il est infiniment plus petit; résolvant alors cette Equation la valeur de ε qu'elle donnera sera la correction qui étant faite à la première valeur de x en donnera une seconde infiniment plus exacte.

Si on n'étoit pas encore content de cette seconde, on en trouveroit une troisième en nommant la seconde valeur l , & substituant $l + \phi$ à la place de x dans l'Equation proposée $x^3 - px + q = 0$, & ainsi de suite.

Mais bien loin qu'on ait communément besoin d'aller à des corrections si rigoureuses, on pourra très-souvent se contenter de la valeur de x trouvée en premier lieu, où tout au plus il suffira, après la substitution de $k + \varepsilon$ pour x dans l'Equation $x^3 - px + q = 0$, de résoudre l'Equation $k^3 + 3k^2\varepsilon - pk - p\varepsilon + q = 0$, c'est-à-dire de négliger outre le terme ε^3 le terme $3k\varepsilon^2$, parce que ce terme est déjà très-petit.

XXIII.

Faisons présentement quelque application de cette méthode, soit par exemple l'Equation $z^3 - z = \frac{1}{3}$. En substituant $\frac{1}{3}$ pour r dans

Application de cette méthode à un exemple.

l'expression $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$, elle deviendra $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$ c'est-à-dire environ 1,138 qui est un peu plus grande que la vraie valeur de z ; mais qui l'est de bien peu, puisque 1,137, comme on le peut voir aisément par le calcul, seroit trop petit.

Pour approcher plus exactement de la vraie valeur de z on substituera 1,138+ ϵ à la place de z dans l'Equation $z^3 - z = \frac{1}{3}$, & l'on aura 0,002426739+2,885132 ϵ =0 en négligeant les termes affectés de ϵ^2 & de ϵ^3 . Cette Equation étant résolue elle donne $\epsilon = -0,000841$, & partant pour la valeur de z corrigée 1,137159. Si on avoit voulu faire cette correction plus exacte en ne négligeant que le terme affecté de ϵ^3 , on auroit résolu l'Equation 0,002426739+2,885132 ϵ +3,414 ϵ^3 =0, ce qui auroit donné la correction $\epsilon = -0,000841836$, c'est-à-dire pour z corrigé 1,137158164.

XXIV.

Autre
exemple.

Supposons présentement qu'il s'agisse de résoudre de l'Equation $x^3 - 13x + 5 = 0$, je fais $x = -z\sqrt{13}$, & elle se change en ..

$$z^3 - z = \frac{5}{13\sqrt{13}}, \text{ égalant donc } r \text{ à } \frac{5}{13\sqrt{13}} \text{ dans}$$

la première valeur approchée $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ de z

$$2 + \sqrt[3]{1 + \frac{15}{13\sqrt{13}}}$$

cette valeur devient $\frac{\quad}{3}$, & elle donne par conséquent pour x

$$\frac{-2\sqrt{13} - \sqrt{13} + \frac{15}{\sqrt{13}}}{3}$$

, c'est-à-dire environ ...
 $-3,784$; si on veut avoir une valeur de x plus exacte, on supposera $x = -3,784 + \epsilon$, & on substituera cette valeur dans l'Equation $x - 13x + 5 = 0$, & l'on aura en négligeant les termes affectés de ϵ^2 & de ϵ^3 l'Equation $0,010205696 + 29,95597\epsilon = 0$ qui donnera $\epsilon = -0,000341$, & par conséquent $x = -3,784341$ valeur plus exacte que la première.

XXV.

Après avoir montré la manière dont on parvient à la solution des Equations du troisième degré, voyons maintenant les moyens qu'il faut employer pour résoudre celles du quatrième degré. Résolution de l'Equation générale du quatrième degré.

Prenant d'abord une Equation générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ pour représenter toutes les Equations du quatrième degré, on réduit bien-tôt la difficulté à ne résoudre qu'une Equation représentée par $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ en faisant $y = z - \frac{1}{4}a$. Ensuite pour résoudre cette Equation, ce qui paroît de plus simple, c'est de la regarder comme le produit

de deux Equations du second degré, & de faire en sorte que la détermination des coefficients que doivent avoir les termes de ces Equations du second degré ne dépende que d'Equations plus aisées à résoudre que la proposée.

Soit pris d'abord $zz + xz + t = 0$ pour l'une de ces Equations, il est évident que l'autre devra avoir pour second terme $-xz$, puisque le produit de ces deux Equations doit donner une Equation dénuée de second terme; soit donc pris pour cette seconde Equation $zz - xz + s = 0$ en multipliant ces deux Equations l'une par l'autre, on aura.....:.....

$$\begin{array}{r} zz + s \quad zz + sxxz + ts = 0 \\ -xx \quad -tx \\ +t \end{array}$$

qui étant comparée avec la proposée donne pour déterminer s, t, x , les trois Equations $s - xx + t = p; sx - tx = q; ts = r$.

Pour faire usage de ces trois Equations, je multiplie la première par x , & je l'ajoute ensuite avec la seconde Equation, j'ai alors $2sx - x^3 = px + q$, d'où je tire $s = \frac{q + px + x^3}{2x}$ que je substitue dans l'Equation

$$ts = r, \text{ ce qui me donne } t = \frac{2rx}{x^3 + px + q}.$$

Or ces deux valeurs de s & de t étant mises dans l'Equation $sx - tx = q$, j'ai enfin

$$\frac{x^3 + px + q}{2} - \frac{2rx^2}{x^3 + px + q} = q \text{ ou } \dots\dots\dots$$

$$x^4 + 2px^3 + pp x^2 - q^2 = 0$$

$$-4r$$

Equation du sixième degré, qui par la méthode de l'article XVII. se change en une du troisième, d'où la difficulté des Equations du quatrième degré est réduite à celle du troisième. Car cette dernière Equation (qu'on appelle la réduite) étant résolue, on n'aura qu'à substituer la valeur de x qu'elle donne dans les Equations $zz - xz + r = 0$, $zz + xz + t = 0$ ou plutôt $zz - xz + \frac{1}{2}xx$

La résolution d'une Equation du quatrième degré dépend d'une Equation du troisième.

Cette Equation s'appelle la réduite.

$$+ \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x} = 0 \text{ \& } zz + xz + \frac{2r}{xx + p + \frac{q}{x}}$$

$= 0$, & résoudre ensuite ces Equations, ou ce qui revient au même substituer la valeur de

$$x \text{ dans les racines } z = \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$\text{ \& } z = -\frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}} + \frac{1}{4}xx \text{ de ces}$$

deux Equations, & l'on aura les quatre racines cherchées de l'Equation $z^4 + pz^3 + qz^2 + r = 0$, & partant celles de l'Equation proposée $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ qui l'a voit produite.

XXVI.

Il paroît d'abord par l'expression de ces valeurs que dans le quatrième degré ainsi que dans le troisième, on ne sauroit arriver à une seule expression pour toutes les racines de

T

Dans le quatrième degré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule.

l'Equation. Cependant si on remarque que la quantité x que renferment les deux expressions précédentes est nécessairement un radical quadré, puisqu'elle est venue de la résolution d'une Equation où x a toujours une dimension paire, on verra sans peine que chacune des expressions précédentes peut désigner quatre racines, la première s'écrivant alors ainsi

$$z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{x}}, \text{ \& la}$$

$$\text{seconde } z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx + p \pm \frac{q}{x}}}.$$

Ces deux Equations paroissant d'abord différentes, on peut craindre de s'être trompé dans le raisonnement précédent, puisqu'il semble mener à une absurdité qui seroit d'avoir huit racines pour une Equation du quatrième degré; mais il est aisé de voir qu'elle n'est qu'apparente, car l'identité de ces deux expressions

$$\text{se réduit à celle de } \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx + p \pm \frac{q}{x}}}, \text{ \&}$$

$$\text{de } \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2x}}, \text{ c'est-à-dire de}$$

$$\pm \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2x} \text{ \& de } -\frac{2r}{xx + p \pm \frac{q}{x}}, \text{ \&}$$

l'identité de ces deux dernières quantités ne sçauroit manquer d'avoir lieu aussi-tôt que x

a été déterminé par l'Equation $x^2 + 2px + p^2 - q^2 = 0$, puisque cette Equation se tire tout de suite de l'égalité de $\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}p$ $+$ $\frac{q}{2x}$ & de $\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}p$ $+$ $\frac{q}{2x}$.

XXVII.

Des deux expressions précédentes, la première $z = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$ étant la plus aisée à employer sera celle qu'il faudra choisir, & les quatre valeurs générales de z qu'elle exprime à la fois sont

$$z = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

$$z = \frac{1}{2}x - \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\frac{1}{2}x - \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

XXVIII.

Comme l'Equation d'où l'on tire la valeur de x donne nécessairement trois valeurs de x précédées du signe $+$, & qu'on n'a aucune

Tij

On arrive
aux mêmes
racines d'une
Equation du
quatrième
degré quelle
que soit celle
des racines
de la réduite
qu'on ait
prise.

raison pour préférer l'une de ces valeurs aux autres, que d'ailleurs on sçait qu'une Equation du quatrième degré ne sçauroit avoir plus de quatre racines, il vient assez naturellement dans l'esprit qu'on peut indifféremment employer celle qu'on voudra de ces trois valeurs de x précédées de \pm , & en tirer cependant toujours la même expression pour les quatre valeurs de z .

Mais quoiqu'après avoir un peu réfléchi sur la théorie des Equations, on ne puisse gueres douter que cela ne soit ainsi, on doit souhaiter de s'en assurer par le détail du calcul.

Pour y parvenir, ce qui se présente le plus naturellement, c'est de trouver les trois valeurs de x précédées de \pm que donne l'Equation $x^6 + 2px^4 + pp x^2 - q^2 = 0$, & les substituer ensuite l'une après l'autre dans l'expression

$$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$$

afin de reconnoître l'identité des trois différentes expressions qu'on auroit par ces substitutions; mais le calcul que cette méthode demanderoit est si long, qu'on ne sçauroit se résoudre à le suivre jusqu'au bout. Voici une autre maniere de parvenir au même resultat.

Je remarque d'abord que quelle que soit la valeur de x que je substitue dans l'expression

$$\text{générale } z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}},$$

les quatre valeurs de z exprimées à la fois par cette quantité pourront être représentées par $i+k, i-k; -i+l, -i-l$: ou ce qui revient au même que les quatre racines de l'Equation $z^4 + pzz + qz + r = 0$ pourront être représentées par $z-i-k, z-i+k, z+i-l, z+i+l$; i désignant alors la partie $\frac{1}{2}x$ de la valeur de z , & k & l les deux

$$\text{quantités } \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}} \text{ \& } \dots$$

$\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$, multipliant donc ces quatre racines les unes par les autres, j'ai l'Equation

$$\begin{array}{r} z^4 - 2iiz^2 - 2ikkz + i^4 = 0 \\ \quad -kk \quad + 2ill - iikk \\ \quad -ll \quad \quad -iill \\ \quad \quad \quad +kkll \end{array}$$

qui étant comparée à $z^4 + pzz + qz + r = 0$ donne les Equations

$$p = -2ii - kk - ll, q = -2ikk + 2ill, \\ r = i^4 - iikk - iill + kkll$$

par lesquelles l'Equation $x^6 + 2px^4 + pp x^2 - 4r$

$-q^2 = 0$ se change en

$$\begin{array}{r} x^6 - 4iix^4 + 8iikkx^2 - 4iik^4 = 0 \\ \quad -2kk \quad + 8iill \quad + 8iikkll \\ \quad -2ll \quad + k^4 \\ \quad \quad -2kkll \quad -4iill^4 \\ \quad \quad \quad + l^4 \end{array}$$

dont les racines sont $x = \pm 2i; x = \pm k \pm l; x = \pm k \mp l$; or si on substitue présentement celle qu'on voudra de ces valeurs de x

dans les quatre expressions contenues dans . .

$$z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}} \text{ ou plutôt}$$

dans $z =$

$$\pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx + ii + \frac{1}{2}kk + \frac{1}{2}ll \mp \frac{ill - ikk}{x}}$$

on verra qu'il en viendra également les quatre valeurs de z ; $i + k$, $i - k$, $-i + l$, $-i - l$.

XXIX.

Outre que par le moyen qu'on vient d'employer, on s'assure qu'il est indifférent de prendre celle qu'on veut des trois racines de la réduite $x^6 + 2px^4 + pp\,xx - qq = 0$, pour

$$-4r$$

la substituer dans l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$; on a en même-tems l'occasion de faire une remarque importante sur les Equations du quatrième degré; c'est que leurs racines sont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou bien, que deux des quatre racines sont réelles & les deux autres imaginaires. Car il n'est pas possible de faire d'autres suppositions pour les quatre racines de l'Equation donnée, aussi-tôt qu'on est assuré, comme on vient de l'être, que ces quatre racines sont toutes exprimées à la fois par la formule . .

Les racines d'une Equation du quatrième degré sont toutes réelles ou toutes imaginaires ou deux réelles & deux imaginaires.

$$\pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$

XXX.

En voyant cette valeur des racines des Equations du quatrième degré, on croiroit d'abord, à cause que x est un radical quarré, que lorsque que quelques-unes de ces racines sont imaginaires, ce pourroit être des imaginaires d'une autre nature que ceux du second degré, c'est-à-dire qu'au lieu d'être simplement la somme d'une quantité réelle & de la racine d'une quantité réelle, mais négative, telle par exemple qu'est $a + \sqrt{-b}$, ce pourroit être des quantités composées de racines imaginaires simples & de la racine d'autres quantités en partie réelle & en partie imaginaires comme se-

Les racines imaginaires du quatrième degré sont de même nature que celles du second

roit $\sqrt{-b} + \sqrt{a + \sqrt{-b}}$, mais on peut s'assurer aisément que toutes les racines imaginaires du quatrième degré peuvent se réduire, ainsi que celles du second, à la somme de quantités réelles & de la racine de quantités réelles & négatives. Car ayant vû tout à l'heure que lorsqu'on veut trouver la valeur de x on peut choisir à volonté entre les valeurs de xx que donne la réduite, & remarquant d'ailleurs par la théorie des Equations que cette réduite qui a toujours pour dernier terme ou produit des racines, une quantité qq négative, doit par conséquent avoir nécessairement une valeur de xx positive, on verra que x pourra toujours être une quantité réelle, & que dans ce cas lorsque

$\sqrt{-\frac{1}{4}xx - p + \frac{q}{x}}$ sera imaginaire , ce ne sera autre chose que la racine d'une quantité réelle & négative.

X X X I.

Lorsque des quatre racines deux sont réelles & deux imaginaires, on résout exactement l'Equation.

Une autre remarque que peut fournir encore l'art. xxviii. c'est que toutes les fois que des quatre racines deux seront imaginaires & deux réelles, la réduite $x^6 + 2px^4 + pp x^2 - qq = 0$ sera du nombre des Equations exactement résolues par la formule de l'article vi, c'est-à-dire qu'on arrivera alors à la solution complète de l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

C'est le contraire lorsque les quatre racines sont toutes réelles ou toutes imaginaires. Au contraire lorsque les quatre racines seront ou toutes réelles ou toutes imaginaires l'Equation réduite ne pourra pas se résoudre par la formule de l'article vi, & par conséquent l'on ne parviendra pas par ce moyen à la solution de l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

Ces deux vérités se tirent de ce que la réduite

$$\begin{aligned} x^6 &= 4ii x^4 + 8iik kx^2 - 4iik^4 = 0 \\ &= 2ll + 8iill + 8iikll \\ &= 2kk + k^4 - 4iil^4 \\ &= 2kkl \\ &+ l^4 \end{aligned}$$

est le produit des trois racines $xx = 4ii$, $xx = kk - 2kl - ll$, $xx = kk + 2kl - ll$; or si l'une des deux quantités k ou l seulement est imaginaire les deux racines $xx = kk - 2kl - ll$, $xx = kk + 2kl - ll$ sont imaginaires, &

par conséquent la réduite est alors résoluble par la formule de l'article vi.

Si au contraire k & l sont toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, les trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ de la réduite seront toutes trois réelles, & par conséquent la formule de l'article vi ne pourra par les donner, ainsi dans le quatrième degré comme dans le troisième, les formules de la résolution ne sçauroient s'appliquer qu'aux Equations qui ont deux racines imaginaires.

XXXII.

Lorsqu'on aura une Equation du quatrième degré à résoudre & qu'on aura formé par son moyen la réduite $x^6 - 2px^4 + pp^2x^2 - 4r$ Maniere de distinguer le cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires.

$= 0$, si on trouve qu'elle échappe à la formule de l'article vi, & qu'on se propose de sçavoir si alors les quatre racines sont réelles ou si elles sont toutes quatre imaginaires, on y parviendra aisément en partant des deux réflexions suivantes qui se présentent assez naturellement en examinant la réduite de l'article xxviii.

1°. Lorsque les quatre racines sont réelles la réduite

$$\begin{array}{rcl}
 x^6 & - & 4iix^4 + 8iikkx^2 - 4iik^4 = 0 \text{ ou} \\
 & - & 2kk + 8iill + 8iikkll \\
 & - & 2ll + k^4 - 4iil^4 \\
 & & - 2kkl \\
 & & + l^4
 \end{array}$$

Conditions
des quatre
racines réel-
les.

$x^6 - 2 \times \overline{2ii + kk + ll} \times x^4 + \overline{8ii \times kk + ll + kk - ll} \times x^2 - 4i \times \overline{kk - ll} = 0$ a nécessairement un second terme négatif & un troisième terme positif, puisque $-2 \times \overline{2ii + kk + ll}$ ne sauroit être ni zero ni positif tant que i, k, l , sont des quantités réelles, & que $\overline{8ii \times kk + ll + kk - ll}$ ne sauroit non plus être ni zero ni négatif dans les mêmes conditions.

2°. Si au contraire les quatre racines sont imaginaires, ou ce qui revient au même si kk & ll sont négatifs, la réduite qui doit alors s'écrire ainsi

$$\begin{array}{rcl} x^6 & - & 4iix^4 & - & 8iikkx^2 & - & 4iik^4 & = & 0 & \text{ou} \\ & + & 2kk & - & 8iill & + & 8iikkll & & & \\ & + & 2ll & + & k^4 & - & 4iil^4 & & & \\ & & & - & 2kkl & & & & & \\ & & & + & l^4 & & & & & \end{array}$$

Conditions
des quatre
racines ima-
ginaires.

$x^6 + 2 \times \overline{kk + ll} \times x^4 - \overline{4ii \times x^4 + kk + ll \times kk + ll - 8ii - 4kkl}$
 $\times x^2 - 4ii \times \overline{kk - ll}$ ne sauroit jamais avoir à la fois, & le second terme négatif & le troisième positif. Car si $kk + ll$ est plus petit que $2ii$, ce qui rendroit le second terme négatif, le troisième terme $\overline{kk + ll \times kk + ll - 8ii - 4kkl}$ sera nécessairement négatif.

XXXIII.

Toute Equa-
tion du qua-
trième degré
sans second
terme, & qui

L'inspection de l'Equation

$$\begin{array}{rcl} z^4 & - & 2iiz^2 & - & 2ikkz & - & \&c. & \text{donnée dans} \\ & - & kk & + & 2iill & & & \\ & - & ll & & & & & \end{array}$$

le même article XXVIII. fournit une remarque, par laquelle on peut reconnoître en quelques rencontres si une Equation qui doit avoir les quatre racines ou toutes réelles ou toutes imaginaires, est dans le premier de ces deux cas ou dans le second. C'est que toute Equation du quatrième degré dont le second terme est évanoui, & dont le troisième est positif, doit avoir nécessairement des racines imaginaires, puisque le troisième terme de toutes ces Equations représenté par $-2ii + kk + ll \times zz$, ne sçauroit jamais être positif tant que ii , kk , ll , seront positifs : c'est-à-dire tant que les racines seront réelles. Or, dès qu'on sçaura qu'une Equation du quatrième degré a des racines imaginaires, & qu'on aura reconnu d'ailleurs qu'elle doit avoir les quatre racines ou toutes réelles ou toutes imaginaires, on ne sera plus embarrassé à sçavoir lequel de ces deux cas a lieu.

XXXIV.

Lorsqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une Equation du quatrième degré sont réelles, avant d'entreprendre de résoudre par approximation sa réduite pour avoir la valeur de x à substituer dans celle de z ; il sera à propos d'examiner par les méthodes de la troisième Partie si quelques-unes de ses racines ne seroient pas commensurables. S'il n'y en avoit qu'une, on n'en seroit gueres plus avancé pour avoir les trois autres, puisque

alors il resteroit à résoudre une Equation du troisième degré, dont les trois racines seroient réelles. Mais si l'Equation du quatrième degré avoit deux racines commensurables, elle seroit résolue aussi-tôt que ces deux racines seroient trouvées, parce qu'alors il ne resteroit plus qu'une Equation du second degré à résoudre.

XXXV.

Avantage
qu'on trouve
à chercher
les diviseurs
commensu-
rables dans la
réduite plu-
tôt que dans
la proposée.

Lorsqu'une Equation du quatrième degré a deux racines commensurables, on peut les reconnoître plus aisément par sa réduite que par elle-même, car il est clair alors que dans les quatre valeurs de x représentées généralement par $i + k$; $i - k$; $-i + l$; $-i - l$; i ne pourra jamais être qu'une quantité commensurable, & partant dans la racine $xx - 4ii$ de la réduite, $4ii$ représentera une quantité quarrée & commensurable; or par cette réflexion on peut diminuer beaucoup les tentatives nécessaires dans la méthode de la troisième Partie, article XII & XIII puisqu'il ne faudra chercher dans les diviseurs du dernier terme qu'une quantité quarrée, & prise avec le signe —.

Il en seroit de même si l'Equation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ devoit se décomposer en deux Equations du second degré dont les coefficients fussent commensurables, au lieu d'employer alors la méthode de la troisième Partie, article XIX, il faudra employer celle de l'article XII & XIII pour chercher les divi-

feurs de la réduite, & ne choisir parmi les diviseurs du dernier terme que les quantités quarrées & affectées du signe —.

XXXVI.

Lorsqu'une Equation où x est au quatrième degré a deux racines commensurables ou qu'elle est simplement composée de deux diviseurs de deux dimensions, on peut dire qu'elle n'est pas véritablement du quatrième degré, & il est bien simple alors qu'elle se résolve par la méthode du second degré; mais il y a des Equations absolument du quatrième degré qui se réduisent cependant à la méthode du second degré. Telles sont les Equations traitées dans la quatrième Partie, article xx & les Equations semblables à $xx + 2 aax - 8aabz + c^4 = 0$, qui est

$$-4ab \quad -4a^3b$$

le produit des deux Equations $zz - 2z\sqrt{ab} + aa - 2a\sqrt{ab} = 0$ & $zz + 2z\sqrt{ab} + aa + 2a\sqrt{ab} = 0$, & qui a pour les quatre ra-

cines $\pm\sqrt{ab} \pm \sqrt{ab} - a^2 \pm 2a\sqrt{ab}$, dans lesquelles il n'entre point d'autres radicaux que ceux du second degré.

On peut distinguer aisément toutes les Equations qui sont dans ce cas; car puisque dans ces Equations la partie $\pm \frac{1}{2}x$ de l'expression $\pm \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p} + \frac{q}{2x}$ de la va-

Maniere de connoître les Equations du quatrième degré, dont les racines n'ont point d'autres radi-

eaux que
ceux du se-
cond degré.

leur de z , ou ce qui revient au même la partie i commune aux quatre racines $i+k$, $i-k$, $-i+l$, $-i-l$, doit être un simple radical du second degré, à cause que x ne monte qu'à des dimensions paires dans la réduite; il faut nécessairement que dans toutes les Equations de cette nature la réduite soit divisible par $xx \pm$ une quantité commensurable, or les diviseurs de cette espece sont aisés à trouver par la méthode de l'article XII & XIII de la troisième Partie.

XXXVII.

Ce qu'il faut
faire pour
avoir les va-
leurs appro-
chées des qua-
tre racines,
lorsqu'elles
sont réelles.

Lorsqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une Equation du quatrième degré sont toutes réelles, & que cette Equation n'a aucun diviseur commensurable ni affecté de radicaux du second degré; on cherchera une des racines de la réduite par la méthode d'approximation enseignée article XXI, & après l'avoir substituée à la place de x dans la formu-

$$\text{le générale } z = \pm \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2x}},$$

on aura les valeurs approchées des quatre racines cherchées.

XXXVIII.

Application
des métho-
des précé-
dentes à un
exemple

Dans la vûe d'appliquer les regles précédentes, soit pris pour exemple l'Equation $z^4 + 3z^2 + 2z - 3 = 0$. En comparant cette Equation à l'Equation générale $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, on aura $p=3$, $q=2$, $r=-3$. Et ces valeurs

étant substituées dans la réduite générale ..

$$x^5 + 2px^4 + ppxx - qq = 0, \text{ la changeront en } -4r$$

$$x^5 + 6x^4 + 21x^3 - 4 = 0.$$

Pour résoudre cette Équation soit d'abord fait $x^2 = u - 2$, afin de faire évanouir le second terme & la réduite se changera en $u^3 + 9u - 30 = 0$, laquelle suivant l'article XIV. est de celles qui n'ont qu'une racine de réelle, & est par conséquent dans le cas d'être résolue par la formule générale de l'article VI. d'où l'on voit que l'Équation proposée aura deux racines réelles & deux imaginaires, & qu'on parviendra par conséquent à les exprimer toutes les quatre par les formules précédentes.

On auroit pu reconnoître (article XXXIII.) que cette Equation devoit avoir des racines imaginaires par cela seul que son troisième terme $3z^2$ avoit un coefficient positif.

Résolvant maintenant l'Equation $u^3 + 9u - 30 = 0$ par la formule de l'article VI. on a pour la racine réelle $u = \sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}}$, donc $+ \sqrt{u} - 2$ ou

$$x = + \sqrt[3]{\sqrt{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}}} - 2.$$

Si on substitue ensuite cette valeur de x dans la valeur générale

$$z = + \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} + \frac{q}{x}} \text{ qui est}$$

$$\text{dans le cas présent } z = + \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}}$$

on aura pour les deux racines réelles de l'Equation proposée

$$z = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{\sqrt{15+6\sqrt{7}} + \sqrt{15-6\sqrt{7}}} - 2$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{1}{4}\sqrt{15+6\sqrt{7}} - \frac{1}{4}\sqrt{15-6\sqrt{7}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{15+6\sqrt{7}} + \sqrt{15-6\sqrt{7}}}}$$

& pour les deux imaginaires

$$z = +\frac{1}{2} \sqrt[3]{\sqrt{15+6\sqrt{7}} + \sqrt{15-6\sqrt{7}}} - 2$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{1}{4}\sqrt{15+6\sqrt{7}} - \frac{1}{4}\sqrt{15-6\sqrt{7}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{15+6\sqrt{7}} + \sqrt{15-6\sqrt{7}}}}$$

XXXIX.

Autre
exemp.e.

Soit présentement l'Equation $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$, en la comparant à l'Equation générale on en tirera $p = -6, q = 8, r = -1$. Et partant, la réduite sera $x^3 - 12x^2 + 40x - 64 = 0$, dans laquelle faisant $x^2 = u + 4$, afin que le second terme disparoisse, on aura $u^3 - 8u - 32 = 0$ qui étant comparée à la formule générale de l'article vi donnera une seule valeur réelle laquelle sera

$$\sqrt[3]{16 + \frac{80}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{16 - \frac{80}{3\sqrt{3}}} \text{ ou}$$

$$u = \frac{\sqrt[3]{16 + \frac{80}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{16 - \frac{80}{3\sqrt{3}}}}{\sqrt[3]{3}} \text{ qui en se ser-}$$

vant de la méthode de la quatrième Partie, article xxxv. se réduit à

$$u = \frac{2 \times 1 + \sqrt{3} - 2 \times 1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4, \text{ substituant } u \text{ dans}$$

présentement cette valeur de u dans $x = \sqrt{u + 4}$, on aura $x = \sqrt{8}$, par laquelle on changera l'Equation générale

$$z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} + \frac{q}{1x}} \text{ en}$$

$z = \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ qui donne pour les deux racines réelles de l'Equation proposée

$-\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, & pour les deux ima-

ginaires $+\sqrt{2} \pm \sqrt{1 - \sqrt{2}}$. Ainsi l'Equation proposée $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$ est de celles qui peuvent se décomposer en deux Equations du second degré, dont les coefficients sont incommensurables, car chacune des doubles racines précédentes sont les racines des Equations $zz + 2z\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$ & $zz - 2z\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$.

On auroit pu sans appliquer la formule de l'article VI, & par conséquent sans avoir besoin de la méthode de la quatrième Partie, article xxxv. résoudre l'Equation $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$, en employant la méthode de la troisième Partie, articles xii & xiii. car on auroit trouvé, par cette méthode, que cette Equation avoit pour diviseur $xx - 8 = 0$.

X L.

Soit l'Equation $y^3 + 16y^2 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$ en substituant dans cette Equation $y = \frac{x}{3}$ Troisième

V.

$z = 4$ pour y afin de faire évanouir le second terme, on la changera en $z^4 + 3z^2 - 52z + 48 = 0$ qui étant comparée à l'Equation générale $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ donnera $p = 3$; $q = -52$; $r = 48$, & partant la réduite $x^6 + 6x^4 - 183x^2 - 2704 = 0$, de laquelle faisant évanouir le second terme par la substitution de $u = 2$ à la place de x^2 on tirera $u^3 - 195u - 2322 = 0$ qui est résoluble par la formule de l'article vi, & fait voir par conséquent que l'Equation proposée est de celles qu'on peut résoudre exactement, c'est-à-dire de celles qui ont deux racines réelles & deux racines imaginaires. Pour les trouver, soit donc employée la formule de l'article vi. à résoudre l'Equation $u^3 - 195u - 2322 = 0$, on aura pour la seule valeur réelle qu'elle donne

$$u = \sqrt[3]{1161 + \sqrt{1073296}} - \sqrt[3]{-1161 + \sqrt{1073296}}$$

qui se réduit à

$$\sqrt[3]{1161 + 1036} - \sqrt[3]{-1161 + 1036} \text{ ou } \sqrt[3]{2197} + \sqrt[3]{125}, \text{ ou enfin à } 18;$$

substituant présentement cette valeur de u dans $x = \sqrt{u - 2}$ on a $x = \sqrt{16} = 4$ qu'il ne s'agit plus que de substituer dans la valeur générale de $z = \pm \frac{1}{2}x$

$$\pm \sqrt{-\frac{1}{4}x^2} = \pm \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}. \text{ On aura par cette substitution pour les deux racines réelles de l'Equation } z^4 + 3z^2 - 52z + 48 = 0; z = 2 \pm \sqrt{-4} = \pm 2 \pm \frac{1}{2} \text{ ou } z = 2 \pm 1, \text{ c'est-à-}$$

dire ou 3 ou 1, & pour les deux racines imaginaires

$z = -2 \pm \sqrt{-4} = -2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{-16}$ ou $z = -2 \pm \sqrt{-12}$. Substituant ensuite ces quatre valeurs dans $y = z - 4$, on aura pour les quatre racines de l'Equation proposée $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$; $y = -1$; $y = -3$; $y = -6 \pm \sqrt{-12}$. On auroit pû trouver ces racines tant par la méthode de la troisième Part. art. XII & XIII. que par celle de l'art. XXIV. de la même Partie en les cherchant dans l'Equation $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$. Car par la première de ces méthodes on auroit trouvé les diviseurs simples $y + 1$; $y + 3$, & pour quotient $y^2 + 12y + 48$, & la seconde auroit donné les deux diviseurs de deux dimensions $yy + 4y + 3$, & $yy + 12y + 48$; on auroit encore pû trouver ces racines bien facilement en cherchant les diviseurs de la réduite par le moyen de la méthode des art. XII & XIII de la troisième Partie, & en ajoutant à cette méthode l'attention de ne choisir parmi les diviseurs du nombre 2704 que des nombres carrés, & de ne les employer qu'avec le signe —. On auroit trouvé alors que cette réduite a pour diviseur de cette espèce $xx - 16 = 0$ qui donne $x = 4$.

XLI.

Soit l'Equation $z^4 + 11z^2 - 2z + 56 = 0$ en la comparant à $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ il vient $p = 11$, $q = -2$, $r = 56$. D'où la ré-

V ij

duite est $x^6 + 22x^4 - 103x^2 - 4 = 0$ qui devient $u^3 - \frac{793}{3}u + \frac{41482}{27} = 0$, après avoir fait évanouir le second terme. Cette Equation étant de celles qui échappent à la formule de l'article VI. l'Equation proposée doit être ou de celles qui ont leurs quatre racines réelles, ou de celles qui les ont toutes quatre imaginaires; mais à cause du terme positif $11z^2$, il faut (article XXXIII.) qu'il y ait des racines imaginaires, donc toutes les quatre racines le sont. Je parviens ensuite à réduire ces quatre racines imaginaires à de simples racines imaginaires du second degré en cherchant par la méthode des articles XII & XIII. de la troisième Partie, les diviseurs de la réduite, car trouvant $xx - 4$ pour diviseur de cette réduite, je vois aussi-tôt que les quatre racines de l'Equation proposée sont $z = +1 \pm \sqrt{-6}$ & $z = -1 \pm \sqrt{-7}$.

X L I I.

Soit maintenant l'Equation $z^4 - 5z^2 + 4z + 29 = 0$ qui donne par la comparaison avec $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$; $p = -5$; $q = 4$; $r = 29$, & par conséquent la réduite $x^6 - 10x^4 - 91x^2 - 16 = 0$, laquelle en faisant $x^2 = u + \frac{10}{3}$ se changera en $u^3 - \frac{3732}{3}u - \frac{10622}{27} = 0$. Or comme cette Equation est de celles que la formule de l'art. VI ne sçauroit résoudre, c'est-à-dire de celles qui ont leurs trois racines réelles, il s'ensuit que les racines cherchées de l'Equation $z^4 - 5z^2 + 4z + 29 = 0$ sont ou toutes

quatre réelles ou toutes quatre imaginaires. Et si on se rappelle qu'on a vû article xxxii. que lorsque les racines sont toutes réelles, la réduite a le second terme négatif, le troisième positif, &c. on en conclura que la proposée est dans le cas d'avoir toutes les racines imaginaires à cause que le troisième terme $-91x^4$ de la réduite est négatif.

Mais par aucune méthode connue, on ne sçauroit parvenir ainsi que dans l'exemple précédent à donner à ces quatre racines imaginaires, la forme ordinaire des racines imaginaires du second degré, parce que la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, la proposée ne sçauroit avoir ni des diviseurs commensurables, ni des diviseurs affectés de simples radicaux du second degré.

XLIII.

Soit l'Equation $z^4 - 32z^2 - 16z - 2 = 0$. qui donne $p = -32$, $q = -16$, $r = -2$, & par conséquent la réduite $x^6 - 64x^4 + 1032x^2 - 256 = 0$.

Sixième exemple.

Cette réduite ayant, comme on peut aisément s'en assurer, les trois racines réelles fait voir que la proposée doit avoir toutes les racines réelles ou toutes imaginaires; on s'assurera facilement que c'est le premier de ces deux cas qui a lieu en ayant recours à l'article xxxii. Je cherche maintenant par la méthode des art. xii & xiii. de la troisième Partie les diviseurs de cette réduite, & je trouve

$xx-32$; qui au moyen de l'expression générale

$z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$ donne

pour les quatre racines cherchées

. $2\sqrt{2+\sqrt{8+\sqrt{2}}}$, $2\sqrt{2-\sqrt{8+\sqrt{2}}}$,

$-2\sqrt{2+\sqrt{8-\sqrt{2}}}$, $-2\sqrt{2-\sqrt{8-\sqrt{2}}}$.

XLIV.

Septième
exemple.

Soit présentement l'Equation $z^4-18z^3+2+70=0$ qui donne la réduite $x^6-36x^4+44x^2-1=0$ ou $u^3-388u-2929=0$; en faisant évanouir le second terme par le moyen de la transformée $x^2=u+12$.

Or comme cette Equation a ses trois racines réelles, & que le second terme $36x^4$ est négatif, tandis que le troisième $44x^2$ est positif, il s'ensuit par l'article xxxi. que la proposée a ses quatre racines réelles; de plus la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, ainsi qu'on peut s'en assurer par la méthode des art. xii & xiii. de la troisième Partie, il faut se contenter de trouver par approximation les racines cherchées.

Pour cela, on commencera par employer la méthode de l'article xxi. à la résolution de l'Equation $u^3-388u-2929=0$, & ayant trouvé 22,74 pour la valeur de u , on substituera cette valeur dans $x=\sqrt{u+12}$, ce qui donnera 5,894 pour x , & en substituant cette valeur de x dans

$x = +\frac{1}{2}x\sqrt{+}\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}$, on aura pour les quatre racines cherchées; $+3,426$; $+2,467$; $-2,315$; $-3,579$ qui seront fort proches des vraies; on en auroit eu de plus exactes si on avoit poussé plus loin la méthode de l'article XXI. pour résoudre l'Equation $u^3 - 388u = 2929$.

XLV.

Après avoir vû dans les résolutions des Equations, tant du second que du troisième & du quatrième degré, comment à l'aide des signes radicaux, on parvient à exprimer la valeur de l'inconnue dans ces Equations, il peut venir dans l'esprit de chercher comment on retrouveroit les Equations dont on connoît les racines par une expression radicale, on peut se proposer, par exemple, de sçavoir quelle est l'Equation dont la racine seroit $x = \sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{a^2c}$; celle dans laquelle x seroit $\sqrt[3]{a^3 + b^3} - \sqrt[3]{a^3 - b^3}$ &c.

Pour résoudre tous les Problèmes de ce genre ou ce qui revient au même pour faire évanouir les radicaux d'une Equation quelconque, on s'y prendra de la maniere suivante qui étoit bien aisée à imaginer après ce qui a été enseigné dans la deuxième Partie, article xxxv.

On mettra à la place de chaque radical Maniere de

faire évanouir les radicaux d'une Equation quelconque,

une inconnue, & l'on aura par ce moyen;

1°. Au lieu de l'Equation donnée une nouvelle Equation qui ne contiendra plus de radicaux; 2°. Autant d'Equations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'Equation proposée. Or chacune de ces Equations à deux termes sera délivrée tout de suite de ses radicaux en élevant ses deux membres à la puissance indiquée par l'exposant du signe radical que l'un de ses deux termes contiendra. Donc il n'y aura plus qu'à chasser de toutes ces Equations délivrées de radicaux les inconnues introduites, opération que l'on a enseigné à l'article xxxv. de la seconde Partie.

Exemple.

Pour éclaircir ce qu'on vient de dire par un exemple, soit proposé de faire évanouir les radicaux de l'Equation $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{add}$, ayant fait $\sqrt[3]{ab^2} = y$ & $\sqrt[3]{add} = z$, on aura les trois Equations $x = y + z$; $y^3 = ab^2$, $z^3 = ad^2$, tirant de la première $y = x - z$, & la substituant dans la seconde, on aura $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$, de laquelle, avec le secours de l'Equation $z^3 = ad^2$, il ne s'agit plus que de chasser z .

Pour cela, je commence par mettre dans la première de ces deux Equations $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$ à la place de z^3 , ab^2 que donne la seconde; & elle devient $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, de laquelle je tire $z^2 = \frac{ad^2 + ab^2 - x^3 + 3x^2z}{3x}$; multipliant ensuite les deux membres de cette Equation par z , &

mettant à la place de z^3 sa valeur ad^2 j'ai une nouvelle Equation $a d^2 =$

$$\frac{ad^2z + ab^2z - x^3z + 3x^2zz}{3x} \text{ qui donne } . . . zz =$$

$$\frac{3ad^2x - a^2z - ab^2 + x^3z}{3x^2}.$$

J'égle alors ces deux valeurs de zz , & j'en tire une Equation où z n'est plus qu'au premier degré, je la résous & j'ai . . . $z =$

$$\frac{x^4 + 2ad^2x - ab^2x}{ab^2 + ad^2 + 2x^3} \text{ qui étant substitué dans l'une}$$

des précédentes, par exemple dans $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, donne enfin l'Equation

$$x^9 - a^3d^3x^6 - 3ab^2x^6 + 3a^2b^4x^3 + 3a^2d^4x^3 - 21a^2d^2b^2x^3 = a^3b^6 + 3a^3b^4d^2 + 3a^3d^4b^2 + a^3d^6,$$

qui ne contient d'autre inconnue que celle qui étoit dans la proposée, & qui est délivrée de toute quantité radicale; on se tireroit de la même maniere de quelque Equation qu'on eût.

Quelquefois les Equations proposées sont si aisées à délivrer des radicaux qu'il est inutile d'avoir recours à la méthode précédente, & qu'il suffit de transposer les termes & d'élever les deux membres à la puissance indiquée par le radical qui est seul alors dans un des membres; par exemple si on avoit l'Equation

$$x = y + \sqrt[3]{a^3 + \sqrt{a^3x}}, \text{ en passant } y \text{ de l'autre côté, \& élevant les deux membres à la troi-}$$

sième puissance , on aura une Equation qui ne contiendra plus d'autre radical que $\sqrt{a^1x}$ mettant alors ce terme seul d'un côté & élevant les deux membres au quarré , on aura une Equation qui ne contiendra plus de radicaux : & il en seroit de même dans beaucoup de rencontres.

FIN.

044310





EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.

Du 20. Juillet 1746.

MESSIEURS NICOLLE & BOUGUER qui
avoient été nommés pour examiner *des*
Elemens d'Algebre composés par Mr. Clairaut,
en ayant fait leur rapport, la Compagnie a
jugé cet Ouvrage digne de l'Impression, en
foi de quoi j'ai signé le présent Certificat, à
Paris ce 5. Août 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHY.

*Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale
des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & fcaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maitres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prevôts de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers, qu'il appartiendra, SALUT. Notre ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES Nous a très-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plu lui donner par un Règlement nouveau de nouvelles marques de notre affection, Elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences, qui sont l'objet de ses exercices ; enforte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déjà donnés au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilège, attendu que celles que Nous lui avons accordées en date du six Avril 1693. n'ayant point eû de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conseil d'Etat, du 13. Août 1704. celles de 1713. & celles de 1717. étant aussi expirées; & désirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leur travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces Présentes à notredite Académie, de faire vendre ou débiter dans tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir, *Toutes les Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les assemblées de notredite Académie Royale des Sciences ; comme aussi les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression ; & ce pendant*

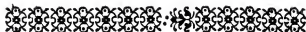
Le tems & espace de quinze années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes. Faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi à tous Imprimeurs-Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire aucun desdits Ouvrages ci-dessus spécifiés, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles même séparées, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit de notredite Académie, ou de ceux qui auront droit d'Elle, & ses ayans cause, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris ; dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que notredite Académie se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1725. & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état, avec les Approbations & Certificats qui en auront été donnés, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le sieur Chauvelin : & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le sieur Chauvelin : le tout à peine de nullité des Présentes ; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir notredite Académie, ou ceux qui auront droit d'Elle & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il

leur soit fait aucun trouble ou empêchement : Vou-
lons que la Copie desdites Présentes qui sera imprimée
tout au long au commencement ou à la fin desdits
Ouvrages, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux
Copies collationnées par l'un de nos amés & féaux
Conseillers & Secrétaires foi soit ajoutée comme à
l'Original : Commandons au premier notre Huissier ou
Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes re-
quis & nécessaires, sans demander autre permission, &
nonobstant clameur de Haro, Charte Normande &
Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné
à Fontainebleau le douzième jour du mois de Novem-
bre mil sept cent trente-quatre, & de notre Regne le
vingtième. Par le Roi en son Conseil.

Signé, SAINSON.

*Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale &
Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, num.
792. fol. 775. conformément aux Reglemens de 1723.
qui font défenses, Art. IV. à toutes personnes de quelque
qualité & condition qu'elles soient, autres les Libraires
& Imprimeurs, de vendre, débiter & afficher aucuns
Livres pour les vendre en leur nom, soit qu'ils s'en
disent les Auteurs ou autrement, & à la charge de four-
nir les Exemplaires prescrits par l'Art. CVIII. du mé-
me Réglement. A Paris le 15. Novembre 1734.*

G. MARTIN, Syndic.



TABLE

DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algébrique d'exprimer les Problèmes par des Equations, & de la résolution des Equations du premier degré.

I. Exemple d'un Problème semblable à ceux que les premiers Algébristes ont pu se proposer. Pag. 2	
Solution de ce Problème telle qu'on la pourroit trouver sans Algebre.	ibid
II. Méthode Algébrique d'exprimer le problème précédent.	3
Le signe $+$ indique l'addition.	ibid
Le signe $=$ marque l'égalité.	4
Une Equation est l'égalité de deux quantités.	ibid
On résout une Equation lorsqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme.	ibid
III. Résolution de l'Equation qui exprime le problème précédent.	ibid
Le caractère $-$ indique la Soustraction.	ibid
IV. Autre solution du problème précédent.	5
V. Autre exemple du problème précédent.	6
VI. Troisième exemple du problème précédent	7
Le signe \times indique la Multiplification.	ibid
VII. Nouveau problème de même nature que le précédent.	8
VIII. La solution analytique d'un problème a deux parties.	9
Dans la premiere on exprime ce problème par une Equation.	ibid

T A B L E

Dant la seconde on résout cette Equation.	ibid
IX. Les Equations du premier degré sont celles où l'inconnue n'est multipliée ou divisée que par des quantités connues.	10
X. Les termes d'une Equation sont ses parties séparées par les + ou -.	11
XI. Tout terme peut être passé d'un côté de l'Equation à l'autre en changeant de signe.	ibid
XII. On appelle membres d'une Equation les deux parties séparées par le signe =.	12
XIV. Maniere de faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue.	13
XV. Maniere de faire disparaître le diviseur qui affecte l'inconnue.	ibid
XVI. Exemple d'Equation du premier degré résolue par les principes précédens.	12
XVII. Maniere de faire évanouir les fractions d'une Equation.	ibid
XVIII. Autre méthode par laquelle on les fait toutes évanouir.	15
XIX. Troisième problème	17
On employe une barre en Algebre comme en Arithmétique pour indiquer la division.	ibid
XXI. Autre solution du même problème.	19
XXII. Quatrième problème.	20
Maniere dont on exprime les proportions en Algebre.	21
XXIV. Solution du problème précédent pris généralement.	24
On employe les premieres lettres de l'alphabet pour exprimer ce que l'on connoît & les dernieres pour ce qu'on ne connoît pas	ibid
Les lettres qui se suivent sans aucun signe entr'elles sont censées se multiplier.	25
XXV. Application de la solution précédents à des nombres.	19
Autre application.	ibid
XXVI. Cinquième problème.	ibid
XXVII. Exemple en nombres.	31
Autre exemple.	32
	XXIX.

DES MATIERES.

- XXIX. Les règles des art. X & suivans suffisent pour
les Equations littérales. 33
L'application de ces règles a donné naissance à plu-
sieurs opérations de l'Algebre. ibid
Premier exemple de résolution d'Equations littérales. ibid
- XXX. Deuxième exemple de résolution d'Equations lit-
térales. 34
- XXXI. Réduction des quantités à leur plus simple ex-
pression. ibid
On appelle termes positifs ceux qui sont précédés de
+, négatifs ceux qui sont précédés de —. 35
- XXXII. L'Addition Algebrique est l'opération précé-
dente ibid
- XXXIII. Comment on peut dire que l'on ajoute une
quantité négative. 37
- XXXIV. On tire encore de l'opération précédente la
Soustraction Algebrique. ibid
Procédé de la Soustraction. 38
- XXXV. On augmente une quantité lorsqu'on en souf-
trait une quantité négative. 39
- XXXVI. Troisième exemple de résolution d'Equations
littérales. ibid
- XXXVII. Un chiffre placé au-dessus & à droite d'une
lettre désigne ce qu'elle auroit été répétée de fois par
la Multiplication. 40
Et dans ce cas la lettre est dite élevée à la puissance
exprimée par ce chiffre qu'on appelle exposant. 41
Les chiffres qui sont à gauche & sur la même ligne
sont nommés coefficients. ibid
- XXXVIII. Quatrième exemple de résolution d'Equa-
tions littérales. ibid
- XXXIX. Les quantités incomplexes sont celles qui
n'ont qu'un terme. 42
Multiplication des quantités incomplexes, tirés des
deux exemples précédens. ibid
- XL. Cinquième exemple de résolution d'Equations lit-
térales. 43
- XLI. Division des quantités incomplexes. 44

T A B L E

XLII. Sixième exemple de résolution d'Equations littérales.	45
Usage des barres au-dessus des quantités.	ibid
Le même que celui des parenthesés.	ibid
XLIII. Multiplication des quantités complexes ou polynomes tirée de l'article précédent	47
Exemple de multiplication de polynomes.	ibid
XLIV. Principe fondamental des Multiplications.	48
XLV. Méthode qu'il faut suivre dans la Multiplication.	49
XLVI. Application de la méthode précédente à un exemple.	50
XLVII. Sixième exemple de résolution d'Equations littérales	52
Maniere de faire la division indiquée dans cet exemple.	ibid
XLVIII. Méthode générale pour les divisions des quantités complexes.	ibid
Maniere d'éviter tout tâtonemens dans la division.	54
Ce que c'est qu'ordonner une quantité par rapport à une lettre.	55
XLIX. Application de la méthode précédente à un exemple.	ibid
L. Autre exemple.	58
LI. Attention qu'il faut avoir en ordonnant lorsqu'il y a plusieurs lettres.	59
LII. Problème dans lequel on employe deux inconnues.	60
LIV. Application de la solution précédente à un exemple.	64
LVI. Autre Problème où l'on employe deux inconnues.	65
LVII. Exemple du problème précédents en nombres.	67
LVIII. Autre exemple.	ibid
Singularité des expressions où l'on arrive dans cet exemple.	68
Maniere de reconnoître ce qu'elles peuvent signifier, ibid	

DES MATIERES.

- LIX. Théorèmes généraux concernant les signes des
quotiens ou des produits. ibid
- LX. On démontre que $-b$ par $-d$ est $+bd$, quoi-
que ces quantités ne soient précédées de rien. 69
- LXI. Les autres cas se démontrent de même. 70
- LXII. Comment la valeur négative qu'on a trouvé ré-
sout le Problème. ibid
- LXIII. Les inconnues devenant négatives, doivent être
prises dans un sens différent de celui de l'énoncé du
Problème. 71
Il en est de même des connues. 72
- LIV. Exemple de l'usage des quantités connues faites
négatives. ibid
- LXV. Autre exemple du même usage des quantités con-
nues faites négatives. 73
- LXVI. Deux Equations du premier degré à deux in-
connues, peuvent toujours être rapportées aux précé-
dentes. 74
Exemple. ibid
- LXVII. Autre exemple. 75
- LXVIII. Autre manière de résoudre le même exemple. 78
- LXIX. Comparaison des deux solutions précédentes. 79
- LXXI. Méthode générale de trouver le plus grand
commun diviseur des deux nombres. 82
- LXXIII. Méthode générale pour trouver le plus grand
commun diviseur des quantités Algébriques. 85
- LXXIV. Premier exemple. 86
- LXXV. Second exemple. 89
- LXXVI. Troisième exemple. 89
- LXXVII. Autre manière de résoudre le même exem-
ple. 90
- LXXVIII. Autres quantités dont on trouve le plus
grand commun diviseur sans la méthode précédente. ibid
- LXXIX. Lorsqu'il y a trois inconnues dans un pro-
blème, il faut trois Equations pour le résoudre. 91
Comment on dégage les inconnues de ces Equations. ibid

T A B L E

LXXX. Problème dans lequel on employe trois inconnues.	2
LXXXI. Maniere d'abrèger les calculs par des dénominations particulieres.	94
LXXXII. Exemple du problème précédent en nombres.	95
LXXXIII. Tous les problèmes du premier degré à trois inconnues peuvent, étant mis en Equations, être compris dans le précédent.	96

S E C O N D E P A R T I E.

De la résolution des Equations du second degré.

I. Problème qui contient dans sa généralité des problèmes de tous les genres.	100
II. Equation du problème précédent pour le second degré.	101
III. Pour le troisième degré.	ibid
IV. Pour le degré n.	ibid
V. Maniere d'arriver à la solution générale des Equations du second degré.	ibid
Le signe $\sqrt{}$ indique la racine quarrée.	104
VI. La racine quarrée d'une quantité est aussi-bien négative que positive.	105
Une Equation du second degré a deux racines, c'est-à-dire deux valeurs d' x .	ibid
VII. Formule contenant ces deux racines.	
VIII. Application de la formule précédente à l'Equation de l'art. II.	106
IX. Réduction de la valeur d' x en formant la racine du produit par celles des produisans.	ibid
X. Exemple de ce problème.	107
XI. Autre exemple.	108
XII. Troisième exemple qui demandant la racine d'une quantité négative est impossible.	ibid
Ces racines sont dites imaginaires.	109
XIII. Quelles sont les Equations du second degré, dont les racines sont imaginaires.	ibid

DES MATIERES.

- XIV. Résolution des Equations du second degré sans les comparer à la formule générale. ibid
- XV. Autre Problème du second degré. 110
- XVI. Des deux valeurs précédentes, l'une est nécessairement positive, l'autre négative. 112
- XVII. Usage de la valeur négative. ibid
- XX. Nouveaux exemples de résolutions d'Equations du second degré. 116
- XXI. Procédé de l'extraction de la racine quarrée expliqué sur un exemple. 118
- XXII. Autres exemples d'extractions de racine quarrée 119
- XXIII. Exemples de réductions de quantités radicales. 121
- XXIV. Les quantités qui n'ont point de racines exactes sont dites incommensurables ou irrationnelles. ibid
L'Addition & la Soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction. ibid
- XXV. Multiplication des incommensurables. 122
- XXVI. Division des incommensurables. 124
- XXVII. Problème du second degré demandant plusieurs inconnues. 125
- XXVIII. Autre maniere de résoudre les Equations précédentes. 127
- XXIX. Exemple d'Equation du second degré à deux inconnues plus compliqué que le précédent. 128
Equation finale à laquelle conduisent ces Equations. ibid
- XXX. Autre maniere de traiter le même exemple. 129
- XXXII. y étant à un degré quelconque, & x seulement au second degré, on traiteroit de même les deux Equations. 131
- XXXIII. Ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'Equation finale, lorsque x seroit au troisième degré. 132
- XXXIV. Ce seroit la même chose si x montoit à des degrés plus élevés. 133
- XXXV. Et s'il y avoit plus de deux inconnues on par-

TABLE

viendrait de même à l'Equation finale.

134

TROISIE' ME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les Equations de tous les degrés, avec la méthode de tirer de ces Equations, celles du premier & du second degré qu'elles peuvent renfermer.

- I. Maniere de former une Equation par le moyen de ses racines. 136
- II. Une Equation a autant de racines que de degrés. 137
- III. Propriété des Equations de tous les degrés. ibid
- IV. Dans une Equation sans second terme la somme des racines positives est égale à celle des négatives. 138
- V. Une Equation qui n'a point de terme connu a au moins une racine égale a zero. 139
- VI. Condition qu'il faut observer dans une Equation pour y trouver les propriétés précédentes. ibid
- VII. Méthode pour avoir les racines commensurables d'une Equation. 140
- VIII. Dans une Equation dont tous les coefficients sont entiers, l'inconnue ne sçauroit être une fraction. 141
- IX. Transformation par laquelle on fait évanouir les fractions d'une Equation quelconque. 142
- X. Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux Equations fractionnaires. 143
- XI. Inconvénient de la méthode précédente. ibid
- XII. Réflexions qui ont servi à perfectionner cette méthode. ibid
- XIII. Principe fondamental pour trouver les racines commensurables. 144
- XIV. Application de la méthode précédente à un exemple. 146
- XVI. Maniere d'avoir tous les diviseurs d'un nombre. 150

DES MATIERES.

- XVII. Autre exemple de la méthode de trouver les racines commensurables. 151
- XVIII. Troisième exemple de la méthode de trouver les racines commensurables. 153
- XIX. Méthode pour trouver des Equations du second degré commensurables dans une Equation donnée. 155
- XX. Application de la méthode précédente. 157
- XX I. Autre application de la méthode précédente. 161
- XXII. Méthode pour trouver les diviseurs d'une dimension lorsque l' x doit avoir un coefficient. 164
- XXIII. Application de cette méthode à un exemple. 166
- XXIV. Méthode pour trouver les diviseurs des deux dimensions lorsque l' x^2 doit avoir un coefficient. 167
- XXV. Application de cette méthode à un exemple. 168
- XXVI. Toute quantité de moins de six dimensions & qui a des diviseurs, en doit avoir d'au-dessous de trois dimensions. 170
- XXVII. Si la quantité a six ou plus de dimensions, elle pourroit n'avoir de diviseurs que de trois ou de plus de dimensions. ibid
- XXIX. Méthode pour trouver tous les diviseurs à deux lettres dans une quantité qui en a trois. 172
- XXX. Exemple. ibid
- XXXI. Autre exemple. 173
- XXXII. Méthode pour trouver les diviseurs de trois lettres & d'une dimension. 174
- XXXIII. Application de la méthode précédente à un exemple. 175
- XXXIV. Autre exemple. 176
- XXXV. Troisième exemple où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même-tems que ceux à trois. 178
- XXXVI. Méthode pour trouver les diviseurs de deux dimensions & à trois lettres. 180
- XXXVII. Application de cette méthode à un exemple. 181

TABLE

XXXVIII. Autre exemple.	184
Application de la méthode donnée article XIV. pour trouver tous les diviseurs d'un nombre , aux quantités littérales.	ibid
XL. Ce qu'il faut faire pour trouver les diviseurs des quantités qui ne sont pas homogènes.	188
XLI. Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.	189

QUATRIÈME PARTIE.

Résolution des Equations de degrés quelconques lorsqu'elles n'ont que deux termes , ou lorsqu'en ayant trois elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux par la méthode des Equations du second degré, avec différentes opérations nécessaires pour ces Equations , comme l'extraction des racines , la réduction des quantités radicales &c.

I. Des Equations du troisième degré à deux termes.	191
On met un 3 sur le caractère $\sqrt{\quad}$ pour exprimer la racine cube.	ibid
Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois.	ibid
IV. Comment on multiplie les radicaux cubes.	194
V. Racines de l'Equation du troisième degré à deux termes.	ibid
VI. Des Equations à deux termes d'un degré quelconque.	195
Ces Equations ne sçauroient jamais avoir plus de deux racines réelles.	ibid
VII. Réflexions sur l'élevation des puissances.	196
VIII. Application des réflexions précédentes à l'extraction des racines.	197
IX. De l'extraction des racines lorsqu'on a des puissances incomplètes.	198
XI. En quoi consiste le cube d'un binôme.	200
XII. Méthode qu'il faut suivre pour prendre la racine cube des quantités complexes.	ibid

DES MATIERES.

XIII. Premier exemple.	101
XIV. Second exemple.	102
XV. Additions & soustractions des quantités radicales de toute espece.	103
XVI. Multiplication & Division des quantités radicales qui ont mêmes exposans.	104
Exemple.	ibid
XVII. Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant.	105
Méthode pour cette réduction.	ibid
XVIII. Autre maniere de faire les opérations précédentes.	106
XIX. Ce que c'est qu'une puissance fractionnaire.	112
Ce que c'est qu'une puissance négative.	ibid
Ce que c'est que la puissance 0.	ibid
XX. Des Equations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second degré.	114
XXI. Exemple de la méthode précédente.	115
XXII. Autre exemple.	ibid
XXIII. Troisième exemple.	116
XXIV. Quatrième exemple.	ibid
XXV. Méthode pour trouver les racines quarrées des quantités en partie commensurables & en partie radicales.	117
XXVII. Application de la méthode précédente à un exemple.	120
XXVI. L. Autre exemple.	ibid
XXX. Troisième exemple.	121
XXXI. Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables & en partie incommensurables.	123
XXXII. Application de la méthode précédente à un exemple.	126
XXXIII. Autre exemple.	ibid
XXXV. Méthode pour trouver les racines des quantités numériques en partie commensurables &c.	129
XXXVI. Application de la méthode précédente à un exemple.	131

T A B L E

XXXVII. Autre exemple.	ibid
XXXVIII. Simplification de la méthode précédente.	232
XXXIX. Application de la nouvelle méthode.	233
XL. Cette nouvelle méthode pourroit être fautive dans les cas où A & B sont de signes différens.	234
Ce qu'il faut faire en ce cas.	ibid
XLI. Cas où la méthode précédente pourroit induire dans l'erreur.	236
Moyen de s'en garantir.	237
XLII. Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux.	239
XLIV. Comment on prend la racine quatrième des quantités de même espece que les précédentes.	ibid
XLV. Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'exposant de la racine est pair.	240
XLVI. Pour les racines cinquièmes.	ibid
XLVII. Pour les racines de tous les degrés.	ibid
XLVIII. De la maniere d'élever un binôme à une puissance quelconque.	242
Formule générale pour l'élevation de $p+q$ à la puissance m.	247
L. Démonstration du théorème de l'art. XLVII.	ibid
LI. Application de la formule précédente à un exemple.	248
LII. Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes.	250
LIII. Exemple.	ibid
LIV. L'on fait voir que la formule précédente est bonne encore, lorsque l'exposant est fractionnaire.	253
LV. La même formule va aux puissances négatives.	254
LVI. Exemple d'une racine quarrée prise par la formule de l'élevation des puissances.	256
LVII. Lorsque les quantités n'ont point de racines exactes on en trouve d'approchées par la méthode précédente.	257
Exemple.	258
Ce que c'est qu'une série ou suite infinie.	ibid

DES MATIERES.

LVIII. Toutes sortes de quantités peuvent être réduites en séries par la formule précédente. 259

CINQUIÈME PARTIE.

Résolution des Equations du troisième & du quatrième degré.

- I. Equation du troisième degré la plus composée. 262
- II. Transformation par laquelle on fait évanouir un terme quelconque de cette Equation. ibid
- III. Transformation précédente appliquée à une Equation du quatrième degré. 264
Ce n'est ordinairement que le second terme qu'on fait évanouir. 265
- IV. Evanouissement du second terme dans une Equation du cinquième degré. ibid
- V. Dans une Equation du degré quelconque m. ibid
- VI. Résolution de l'Equation générale $x^3 + px + q = 0$. 266
- VII La formule précédente ne donne qu'une des trois racines. 268
Manière d'avoir les deux autres. ibid
- VIII. Cas où la formule précédente ne sauroit faire connoître x à cause des imaginaires qu'elle renferme. 269
- IX. On démontre cependant que dans ce cas x est réel. 270
- X. Par la même méthode on a une valeur approchée de x. 272
- XI. Les deux autres valeurs d'x sont aussi réelles dans le même cas. ibid
- XII. Comment des racines de l'Equation $x^3 + px + q = 0$, on tire celle de l'Equation $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$. 274
- XIII. Une Equation du troisième degré a ses trois racines réelles, ou une réelle avec deux imaginaires. ibid
- XIV. Comment on distingue ces cas. ibid

T A B L E

XV. Quelles sont les racines lorsque $\frac{1}{27} p^3$ est négatif & $= \frac{1}{4} qq.$	275
XVI. Application des méthodes précédentes à un exemple.	276
XVII. Autre exemple contenant une Equation du sixième degré qui se réduit au troisième.	277
Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi.	278
XIX. Quatrième exemple dans lequel la formule de l'art. vi. est insuffisante.	279
Application de l'art. x. pour approcher des racines.	ibid
XX. Inconvénient de la méthode enseignée art. x.	281
XXI. Autre méthode d'approximation générale & facile dans la pratique.	282
La méthode qu'on vient d'enseigner donne d'abord x à $\frac{1}{2}$ ème près au moins.	284
XXII. Manière de rendre l'approximation beaucoup plus exacte.	ibid
XXIII. Application de cette méthode à un exemple.	285
XXIV. Autre exemple.	286
XXV. Résolution de l'Equation générale du quatrième degré.	287
La résolution d'une Equation du quatrième degré dépend d'une Equation du troisième.	289
Cette Equation s'appelle la réduite.	ibid
XXVI. Dans le quatrième degré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule.	290
XXVII. On arrive aux mêmes racines d'une Equation du quatrième degré quelle que soit celle des racines de la réduite qu'on ait prise.	292
XXIX. Les racines d'une Equation du quatrième degré sont toutes réelles ou toutes imaginaires, ou deux imaginaires & deux réelles.	294
XXX. Les racines imaginaires du quatrième degré sont de même nature que celles du second.	295
XXXI. Lorsque des quatre racines deux sont réelles & deux imaginaires, on résout exactement l'Equation.	296

DES MATIERES.

<i>C'est le contraire lorsque les quatre racines sont toutes réelles ou toutes imaginaires.</i>	ibid
XXXII. <i>Maniere de distinguer les cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires.</i>	297
<i>Conditions des quatre racines réelles.</i>	298
<i>Conditions des quatre racines imaginaires.</i>	ibid
XXXIII. <i>Toute Equation du quatrième degré sans second terme & qui a le troisième positif a des racines imaginaires.</i>	ibid
XXXV. <i>Avantage qu'on trouve à chercher les diviseurs commensurables dans la réduite, plutôt que dans la proposée.</i>	300
XXXVI. <i>Maniere de connoître les Equations du quatrième degré dont les racines n'ont point d'autres radicaux que ceux du second degré.</i>	301
XXXVII. <i>Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines lorsqu'elles sont réelles.</i>	302
XXXVIII. <i>Application des méthodes précédentes à un Exemple.</i>	ibid
XXXIX. <i>Autre exemple.</i>	304
XL. <i>Troisième exemple.</i>	305
XLI. <i>Quatrième exemple.</i>	307
XLII. <i>Cinquième exemple d'une Equation.</i>	308
XLIII. <i>Sixième exemple.</i>	309
XLIV. <i>Septième exemple.</i>	310
XLV. <i>Maniere de faire évanouir les radicaux d'une Equation quelconque.</i>	311

Fin de la Table.

FAUTES A CORRIGER.

P Age 3 à la seconde apostille au lieu de x met-
tés $+$.

4 lig. 5, $-\frac{1}{2}x$ lisés $-\frac{2}{3}x$.

lig. 11, *changé*, lisés *changée*.

7 lig. 6, 2 $+\frac{1}{2}x$, lisés $2x+\frac{1}{3}x$.

lig. 12, 1800, lisés 180.

lig. 26, $\frac{11260}{7} = 228$, lisés $\frac{11260}{7} = 2280$.

lig. 30, 3326, lisés 3220.

13 lig. 6, 22, 23, 24 au lieu de 53200 lisés
5320.

14 lig. 10, 359, lisés 399.

lig. 13, $\frac{2}{3}$, lisés $\frac{1}{9}$.

18 lig. 11, $\frac{2x+6}{3}$, lisés $\frac{2x+16}{3}$.

lig. 12, $x-3$, lisés $\frac{x-1}{2}$.

lig. dernière $+2$, lisés $+8$.

19 à la fin de la première ligne ajoutés *le*.

21 lig. 16, changés réciproquement les mots
heures & lieues.

26 lig. 5 & 6 changés réciproquement les mots
second & premier.

lig. 10, *ajoute*, lisés *ajouté*.

27 lig. 19, au lieu de 41, lisés 21.

lig. 23, $\frac{1}{3}$, lisés $\frac{1}{7}$.

28 lig. 9, *on*, lisés *ou*.

34 lig. 20, *tres*, lisés *autres*.

37 lig. 27, *ac*, lisés *3 ac*.

40 lig. 8, *2b*, lisés *b*.

46 lig. 9, par *c*, lisés par *dc*.

lig. 10, $-ax$, lisés $-ac$.

47 l. 21, $2a^1c^2-5a^2b$, lisés $2a^1c^2-5a^4b+6a^1$

- lig. dernière $2a^3c$, lisés $2a^3c^2$.
- 48 lig. 19, $5a^3b$, lisés $5a^4b$.
- 53 lig. 4, ac , lisés ac^2 .
- 56 lig. 20, $10ba^3$, lisés $10ba^2$.
- 57 lig. antepenultième $24b^3$, lisés $24b^4$.
- 59 lig. 16, $2acd$, lisés $2acd^2$.
- 67 lig. dernière f , lisés af .
- 68 lig. 1, 200, lisés 300.
- lig. 20, $\frac{1}{3}y$, lisés $\frac{2}{3}y$.
- lig. 22, $\frac{2}{3}y$, lisés $\frac{7}{3}y$.
- 74 lig. 7, $\frac{28}{7}$, lisés $\frac{218}{7}$.
- 79 lig. 9, au diviseur au lieu de mpq , lisés mp^3q .
- 82 aux deux dernières lignes au lieu de $\frac{c}{D}$,
lisés $\frac{D}{c}$.
- 87 lig. 12, $2q^3$ lisés $2q^2$.
- 89 lig. 24, $dd - cc$, lisés $dd - cc$.
- 90 lig. 14, $4ca - 4aa \times d$, lisés $4aa - 4ca \times d$.
- lig. 21, $4ad + 2cc$, lisés $4ad + 2cc$.
- 93 lig. 10, cz , lisés cz .
- 101 lig. 8, $a \times 1 - \frac{x^2}{100}$, lisés $a \times 1 - \frac{x}{100}$.
- lig. 13, $a \times 1 - \frac{x}{100} - b$ qui se réduit à $x - 100x$,
lisés $a \times 1 - \frac{x}{100} - b$ qui se réduit à $x^2 - 100x$.
- 102 lig. 4, $1000000 \frac{b}{a}$, lisés $1000000 \frac{b}{a}$.
- 104 lig. 6, c'est-à-dire $\frac{1}{2}p$, lisés c'est-à-dire $\frac{1}{2}p^2$.
- lig. 9, $x - \frac{1}{2}p$, lisés $x + \frac{1}{2}p$.

105 lig. avant dernière $q + \frac{1}{4}p^2$, lisés $q + \frac{1}{4}p^2$.

106 lig. 7. $\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, lisés $\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$.

112 lig. 1 $\frac{\frac{a}{n-m}}{\frac{a}{n-m}}$ lisés $\frac{\frac{a}{n-m}}{\frac{a}{n-m}}$

lig 17, $\frac{a}{n-m} \times \frac{a}{n-m} + \sqrt{nm}$ lisés . . . , .

$\frac{a}{n-m} \times \frac{a}{n-m} + \sqrt{mn}$.

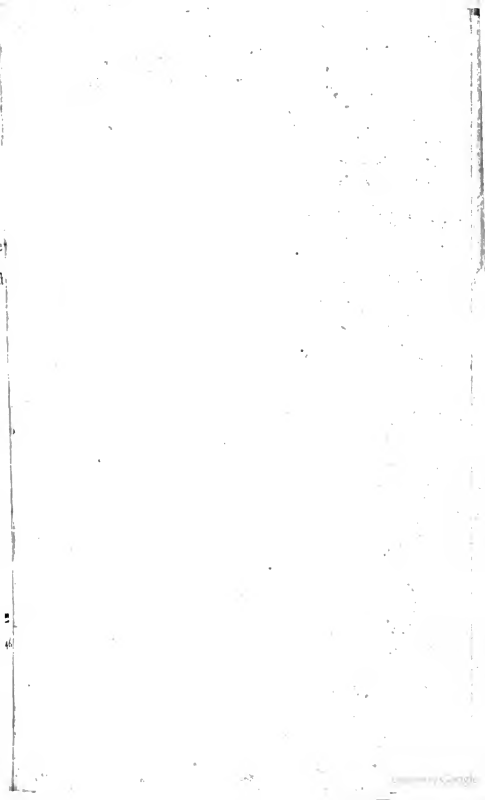
167 à la dernière apostille, au lieu de lorsque l' x , lisés lorsque l' x^2 .

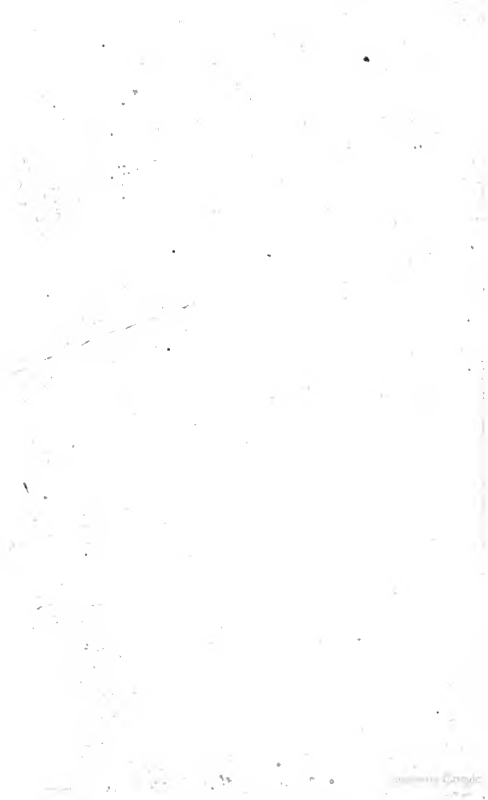
253 avant dernière ligne ôtés le $+$ qui est audessus de z^1 , il doit être devant l'&c.

266 à l'apostille au lieu de pu , lisés px .

275 à l'apostille au lieu de $\frac{1}{2}qq$, lisés $\frac{1}{4}qq$.

285 lig. 21 où, lisés ou.





10212





